UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTMENT DE PHYSIQUE
EL JADIDA

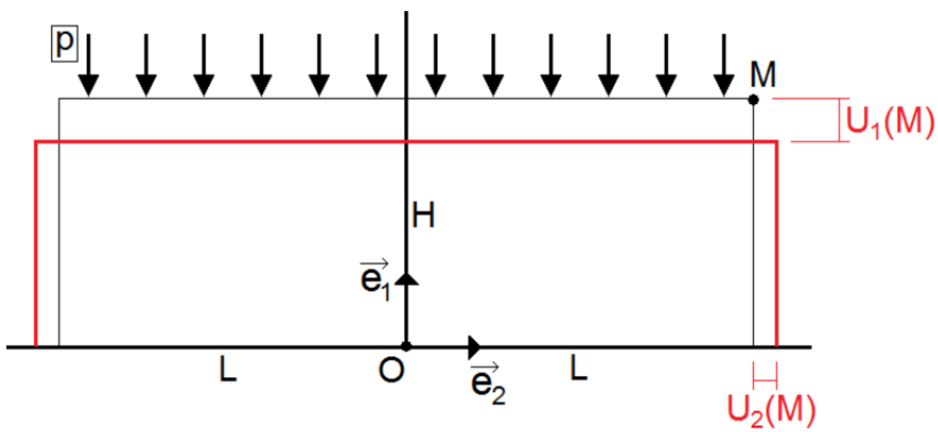
ANNEE UNIVERSITAIRE : 2019/2020
FILIÈRE : SMP6
PHYSIQUE : M34
MODULE : MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

SERIE 3

Exercice 1:

1. La section du massif contenant le point M est un rectangle et soumise aux conditions aux limites:

   - face supérieure: pression uniforme égale à p
   - faces latérales: pression uniforme égale à 0
   - face inférieure: déplacements vertical et horizontal sont bloqués au point central.



2. Le champ de déplacement est donné par

$$\vec{U} = \begin{cases} AX_1 + CX_2 \\ -CX_1 + BX_2 \\ 0 \end{cases} \tag{1}$$

donc Il s'agit d'un mouvement planaire dont le tenseur des déformations est

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{grad}\vec{U} + (\mathrm{grad}\vec{U})^T\right) \tag{2}$$

avec

$$\mathrm{grad}\vec{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C & 0 \\ -C & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

ce qui donne

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

et par suite il s'agit d'une déformation plane dont la base principale de déformation est la base d'origine $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, et les déformations principales sont $\{A, B, 0\}$.

3. On applique la loi de Hooke formulée en fonction des coefficients de Lamé :

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu\bar{\bar{\varepsilon}} + \lambda \mathrm{Tr}\bar{\bar{\varepsilon}}\ I \tag{5}$$

avec

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{6}$$

Puisque $\mathrm{Tr}\bar{\bar{\varepsilon}} = A + B$, alors on obtient

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda(A+B) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

ou bien

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu \begin{pmatrix} 2\mu A + \lambda(A+B) & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu B + \lambda(A+B) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(A+B) \end{pmatrix} \tag{8}$$

On remarque que les tenseurs $\bar{\bar{\sigma}}$ et $\bar{\bar{\varepsilon}}$ sont homogènes, c'est-à-dire qu'ils sont égaux en tout point du système.

4. Sur la face supérieure, la pression appliquée est

$$\vec{T_d} = -p\vec{e_1} \tag{9}$$

Par ailleurs, la condition au limite d'équilibre sur cette face supérieure s'écrit

$$\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T_d} \tag{10}$$

La normale unitaire sortante à cette surface est $-\vec{e_1}$, donc on a

$$\bar{\bar{\sigma}} \cdot (-\vec{e_1}) = \vec{T_d} \tag{11}$$

Par conséquent, on peut écrire

$$-(2\mu A + \lambda(A+B))\vec{e_1} = -p\vec{e_1} \tag{12}$$

Finalement on trouve

$$2\mu A + \lambda(A+B) = p \tag{13}$$

On applique la même méthode sur une des faces latérales pour avoir

$$2\mu B + \lambda(A+B) = 0$$

Il en résulte un système linéaire de deux équations à deux inconnues A et B

$$\begin{cases} (2\mu+\lambda)A + \lambda B = p \\ \lambda A + (2\mu+\lambda)B = 0 \end{cases} \tag{14}$$

La deuxième équation donne

$$B = \frac{-\lambda B}{2\mu\lambda} \tag{15}$$

que l'on réinjecte dans la première pour obtenir

$$A\left(2\mu+\lambda-\frac{\lambda^2}{2\mu+\lambda}\right) = p \tag{16}$$

Après calcul, il vient

$$A = p\frac{-2\mu-\lambda}{4\mu(\mu+\lambda)}, \qquad B = p\frac{\lambda}{4\mu(\mu+\lambda)} \tag{17}$$

Sur la face inférieure, le déplacement est bloqué verticalement. En posant $X_1 = 0$, on peut donc écrire

$$U_1(X_1, X_2, X_3) = 0 = AX_1 + CX_2 \tag{18}$$

On en déduit

$$CX_2 = 0, \qquad \forall(X_2, X_3) \qquad \Longrightarrow \quad C = 0. \tag{19}$$

5. En utilisant les résultats précédents, on peut réécrire le champ de déplacement comme

$$\vec{U} = \begin{cases} AX_1 = p\dfrac{-2\mu-\lambda}{4\mu(\mu+\lambda)}X_1 \\ BX_2 = p\dfrac{\lambda}{4\mu(\mu+\lambda)}X_2 \\ 0 \end{cases} \tag{20}$$

Les coordonnées du point M sont

$$X_1 = H = 0.15m, \qquad X_2 = L = 0.2m. \tag{21}$$

Par ailleurs, les coefficients de Lamé sont donc

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{210000}{2(1+0.3)} = 80770\mathsf{MPa} \tag{22}$$

$$\lambda = \frac{210000 \times 0.3}{(1+0.3)(1-2\times 0.3)} = 121150\mathsf{MPa} \tag{23}$$

Il vient finalement

$$A = -2.1666 \times 10^{-3}, \qquad B = 9.2855 \times 10^{-4} \tag{24}$$

et enfin :

$$\vec{U}(M) = \begin{cases} -0.325\mathsf{mm} \\ 0.186\mathsf{mm} \\ 0 \end{cases} \tag{25}$$

Exercice 2:

1. Il s'agit d'un problème de déformations planes car la section du barrage est identique sur toute sa longueur, de même que le chargement qu'il subit. On en déduit que son champ de déplacement est entièrement situé dans le plan perpendiculaire à sa longueur (plan d'une "tranche"), et que sa déformation dans la direction de sa longueur est empêchée par les tranches voisines. Les champs inconnus ont la forme suivante :

$$\vec{U} = \begin{cases} U_1(X_1, X_2) \\ U_2(X_1, X_2) \\ 0 \end{cases} \quad , \quad \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{26}$$

2. Sur une "tranche" du barrage, les conditions aux limites sont les suivantes :

   - Sur sa base il est parfaitement encastré : $\vec{U} = \vec{0}$ sur S_{uAB}
   - Sur la face immergée (notée S_{t0A}), il subit la pression de l'eau
   - Sur la face à l'air libre (notée S_{t0A}), il subit la pression atmosphérique qui est négligeable.

   Les équations d'équilibre du milieu continu sont

   - A l'intérieur du domaine, forme locale du PFD appliquée à l'équilibre statique du solide chargé
   $$\mathrm{div}\bar{\bar{\sigma}} + \rho\vec{g} = 0 \qquad \text{sur } D \tag{27}$$
   - Sur la surface immergée, la normale sortante est $\vec{n} = -\vec{e_1}$, et la contrainte subie par la surface est proportionnelle à la profondeur x_2 et orientée dans la direction de $\vec{e_1}$
   $$\bar{\bar{\sigma}} \cdot (-\vec{e_1}) = \rho_e g x_2 \ \vec{e_1} \qquad \text{sur } S_{t0A} \tag{28}$$
   - Sur la surface à l'air libre, la normale sortante est $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e_1} - \vec{e_2})$, et la contrainte subie par la surface est nulle
   $$\bar{\bar{\sigma}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e_1} - \vec{e_2}) \right) = 0 \tag{29}$$

3. L'énoncé postule que tous les termes du tenseur des contraintes sont des fonctions linéaires des coordonnées x_1 et x_2. Il s'agit d'une proportionnalité entre chaque terme de ce tenseur et ces coordonnées. On peut donc écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= a_{11}x_1 + b_{11}x_2 \\ \sigma_{12} &= a_{12}x_1 + b_{12}x_2 \\ \sigma_{22} &= a_{22}x_1 + b_{22}x_2 \\ \sigma_{33} &= a_{33}x_1 + b_{33}x_2 \end{aligned}$$

   Dans ces expressions, les termes inconnus $(a_{11}, b_{11}, a_{12}, b_{12}, a_{22}, b_{22}, a_{33}, b_{33})$ sont des constantes de proportionnalité. Quant aux deux autres composantes du tenseur de Cauchy, on a déjà démontré qu'elles sont nulles car la déformation est plane et par suite $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$. Pour que ce champ de contrainte soit admissible, il doit vérifier l'équation de Beltrami

$$\Delta\bar{\bar{\sigma}} + \frac{1}{1+\nu}\text{grad}[\text{grad}\text{Tr}\bar{\bar{\sigma}}] = 0 \tag{30}$$

On écrit d'abord les différents termes de cette équation sous forme indicielle tels que ee premier terme est

$$(\Delta\bar{\bar{\sigma}})_{ij} = \Delta(\sigma_{ij}) = \frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x_3^2} \tag{31}$$

tandis que le deuxième terme est

$$(\text{grad}[\text{grad}\text{Tr}\bar{\bar{\sigma}}])_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial x_i \partial x_j} \tag{32}$$

Finalement, l'équation de Beltrami peut s'écrire en notation indicielle comme

$$\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial x_i \partial x_j}\right) = 0 \tag{33}$$

On voit que cette dernière équation ne fait apparaître que des dérivées secondes des termes du tenseur des contraintes par rapport aux coordonnées spatiales. Puisque ces termes suivent une variation affine par rapport aux coordonnées spatiales, donc toutes ces dérivées secondes sont nulles. Il en résulte que l'équation de Beltrami est vérifiée ainsi que l'hypothèse d'un champ de contrainte affine est satisfaisante.

4. On cherche à utiliser la loi de Hooke pour démontrer que $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$. On l'utilise d'abord dans le sens contraintes-déformations

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1+\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1+\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1+\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \tag{34}$$

Il en résulte que

$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\nu\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} + (1-\nu)\varepsilon_{33}) \tag{35}$$

On utilise alors la loi de Hooke dans le sens déformations-contraintes pour exprimer ε_{11} et ε_{22}

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \tag{36}$$

On en déduit

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}), \qquad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{11} + \sigma_{22} - \nu\sigma_{33}) \tag{37}$$

On réinjecte ces deux expressions dans la formule de σ_{33}

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}) + \frac{\nu}{E}(-\nu\sigma_{11} + \sigma_{22} - \nu\sigma_{33})\right) && (38) \\ &= \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) && (39) \end{aligned}$$

5. Les équations d'équilibre ont déjà été données à la question 2, on va donc maintenant les utiliser en tirant parti de l'expression générale des termes du tenseur des contraintes donnés à la question 3. L'objectif est de trouver les expressions des constante $(a_{11}, b_{11}, a_{12}, b_{12}, a_{22}, b_{22}, a_{33}, b_{33})$ et donc de définir entièrement le tenseur de Cauchy dans le système. La première équation d'équilibre est celle liée à la forme locale du PFD, valable pour tout point du système

$$\mathrm{div}\bar{\bar{\sigma}} + \rho\vec{g} = 0, \qquad \text{sur } D \tag{40}$$

On calcule d'abord la divergence du tenseur de Cauchy

$$(\mathrm{div}\bar{\bar{\sigma}})_i = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \tag{41}$$

Donc on a

$$\mathrm{div}\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} & \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} & \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} & \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix}, \qquad \vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Puisque $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, on peut donc écrire le PFD sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = -\rho g \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

La troisième équation est triviale car $\sigma_{33} = 0$, on peut donc tirer de ce système deux relations importantes

$$\begin{cases} a_{11} + b_{12} = 0 \\ a_{12} + b_{22} = -\rho g \end{cases} \tag{43}$$

La deuxième équation d'équilibre est celle qui concerne la condition limite sur la surface immergée S_{t0A}:

$$\bar{\bar{\sigma}} \cdot (-\vec{e_1}) = \rho_e g x_2 \ \vec{e_1} \qquad \text{sur } S_{t0A} \tag{44}$$

Le premier terme de cette équation vaut

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} \tag{45}$$

On peut donc écrire

$$\left\{ \begin{array}{r} -\sigma_{11} = \rho_e g x_2 \\ -\sigma_{12} = 0 \\ -\sigma_{13} = 0 \end{array} \right. \qquad \text{sur } S_{tA} \tag{46}$$

La troisième équation est triviale, donc on remplace les termes de $\bar{\bar{\sigma}}$ par leurs expressions dans les deux premières équations

$$\left\{ \begin{array}{r} -a_{11}x_1 - b_{12}x_2 = \rho_e g x_2 \\ -a_{12}x_1 - b_{12}x_2 = 0 \end{array} \right. \tag{47}$$

Or sur la surface S_{t0A} on peut écrire $x_1 = 0$, il vient donc

$$\left\{ \begin{array}{r} -b_{11}x_2 = \rho_e g x_2 \\ -b_{12}x_2 = 0 \end{array} \right. \tag{48}$$

Finalement, on obtient les deux relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{r} b_{11} = -\rho_e g \\ b_{12} = 0 \end{array} \right. \tag{49}$$

La dernière équation d'équilibre dont on dispose est celle qui concerne la surface à l'air libre notée S_{tB} :

$$\bar{\bar{\sigma}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e_1} - \vec{e_2}) \right] = 0 \qquad \text{sur } S_{tOB} \tag{50}$$

Le premier terme de cette équation s'écrit

$$\bar{\bar{\sigma}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e_1} - \vec{e_2}) \right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{12} \\ \sigma_{12} - \sigma_{22} \\ \sigma_{13} - \sigma_{23} \end{bmatrix} \tag{51}$$

Par conséquent, l'équation d'équilibre se traduit par

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} - \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{12} - \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{13} - \sigma_{23} = 0 \end{array} \right. \qquad \text{sur } S_{tOB} \tag{52}$$

La troisième équation de ce système est triviale une fois de plus, et les deux autres nous permettent d'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + b_{11}x_2 - a_{12}x_1 - b_{12}x_2 = 0 \\ a_{12}x_1 + b_{12}x_2 - a_{22}x_1 - b_{22}x_2 = 0 \end{array} \right. \qquad \text{sur } S_{tOB} \tag{53}$$

Or sur la surface S_{tOB} on peut prendre $x_1 = x_2$, et ces termes peuvent donc se simplifier dans le système précédent. Il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} + b_{11} - a_{12} - b_{12} = 0 \\ a_{12} + b_{12} - a_{22} - b_{22} = 0 \end{array} \right. \tag{54}$$

En regroupant les trois équations d'équilibre, on obtient un système avec six équations et six inconnues

$$\begin{cases} a_{11} + b_{12} = 0 \\ a_{12} + b_{22} = -\rho g \\ b_{11} = -\rho_e g \\ b_{12} = 0 \\ a_{11} + b_{11} - a_{12} - b_{12} = 0 \\ a_{12} + b_{12} - a_{22} - b_{22} = 0 \end{cases} \tag{55}$$

En tenant compte du fait que $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, donc on peut définir entièrement notre champ des contraintes en précisant les huit coefficients inconnus

$$\begin{cases} a_{11} = 0, \qquad b_{11} = -\rho_e g \\ a_{12} = -\rho_e g, \qquad b_{12} = 0 \\ a_{22} = (\rho - 2\rho_e) g, \qquad b_{22} = (\rho_e - \rho) g \\ a_{33} = \nu(\rho - 2\rho_e) g, \qquad b_{33} = -\nu\rho g \end{cases} \tag{56}$$

et par suite on obtient

$$\sigma_{11} = a_{11}x_1 + b_{11}x_2 = -\rho_e g x_2 \tag{57}$$
$$\sigma_{12} = a_{12}x_1 + b_{12}x_2 = -\rho_e g x_1 \tag{58}$$
$$\sigma_{13} = 0 \tag{59}$$
$$\sigma_{22} = a_{22}x_1 + b_{22}x_2 = (\rho - 2\rho_e) g x_1 + (\rho_e - \rho) g x_2 \tag{60}$$
$$\sigma_{23} = 0 \tag{61}$$
$$\sigma_{33} = a_{33}x_1 + b_{33}x_2 = \nu(\rho - 2\rho_e) g x_1 - \nu\rho g x_2 \tag{62}$$

Le tenseur des contraintes est donc entièrement déterminé. Les trois valeurs non-nulles du champ de déformation se déduisent de la loi de Hooke

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}) = \frac{x_1}{E}(a_{11} - \nu a_{22} - \nu a_{33}) + \frac{x_2}{E}(b_{11} - \nu b_{22} - \nu b_{33}) \tag{63}$$
$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} = \frac{1+\nu}{E} a_{12} x_1 + \frac{1+\nu}{E} b_{12} x_2 \tag{64}$$
$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{11} + \sigma_{22} - \nu\sigma_{33}) = \frac{x_1}{E}(-\nu a_{11} + a_{22} - \nu a_{33}) + \frac{x_2}{E}(-\nu b_{11} + b_{22} - \nu b_{33}) \tag{65}$$

Tous calculs faits, on trouve

$$\varepsilon_{11} = x_1 \frac{-\nu g}{E}(1+\nu)(\rho - 2\rho_e) + x_2 \frac{g}{E}(1+\nu)(\nu\rho - \rho_e) \tag{66}$$
$$\varepsilon_{12} = -x_1 \rho_e g \frac{1+\nu}{E} \tag{67}$$
$$\varepsilon_{22} = x_1 \frac{g}{E}(1-\nu^2)(\rho - 2\rho_e) + x_2 \frac{g}{E}\left[\rho(\nu^2 - 1) + \rho_e(\nu + 1)\right] \tag{68}$$

Le champ de déformation est donc lui aussi entièrement défini.

6. La seule contrainte tangentielle non nulle est σ_{12} et cette contrainte augmente (en valeur absolue) proportionnellement avec la coordonnée x_1. Elle est donc maximale (en valeur absolue) au point B, où elle vaut

$$\sigma_{12} = -\rho_e g h \tag{69}$$