UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTMENT DE PHYSIQUE
EL JADIDA

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2019/2020
FILIÈRE : SMP6
PHYSIQUE : M34
MODULE : MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

SERIE 2: Correction

Exercice 1:

1- Champ des déplacements pour les repères (1) et (2):

$$(1): \begin{cases} u_1 = x_1' - x_1 = (a-1)x_1 \\ u_2 = x_2' - x_2 = (1-a)x_2 \end{cases} \qquad (2): \begin{cases} u_1 = x_1' - x_1 = 2bx_2 \\ u_2 = x_2' - x_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

2- Rotation du corps rigide:

$$(1): \ \omega_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = 0, \qquad (2): \ \omega_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = b \tag{2}$$

3- Tenseurs des déformations:

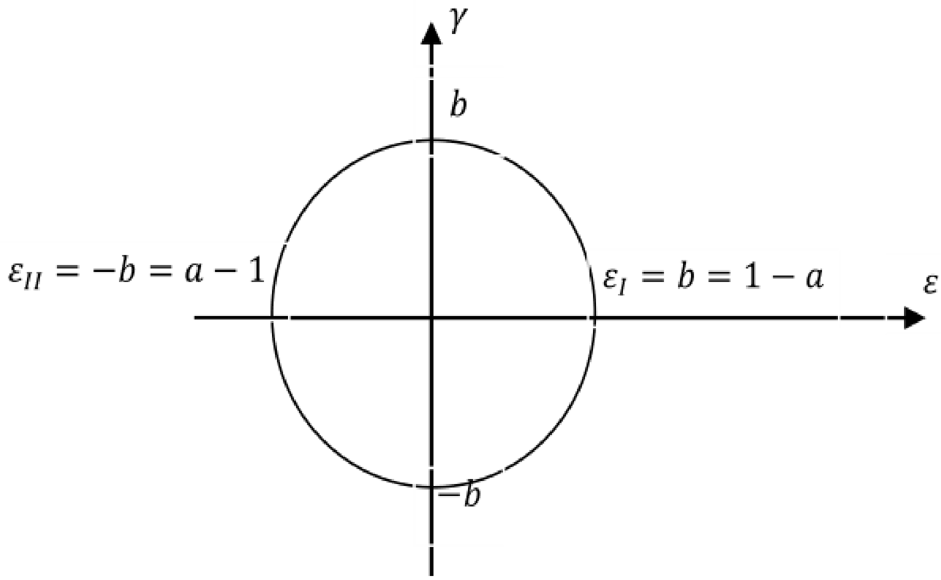
$$(1): \ \varepsilon = \begin{bmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & 1-a \end{bmatrix}, \qquad (2): \ \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

4- Déformations principales:

$$(1): \ \varepsilon_I = a-1, \qquad \varepsilon_{II} = 1-a, \qquad (2): \ \varepsilon_I = b, \qquad \varepsilon_{II} = -b \tag{4}$$

5- Les déformations principales doivent être les mêmes donc il faut que $b = a - 1$

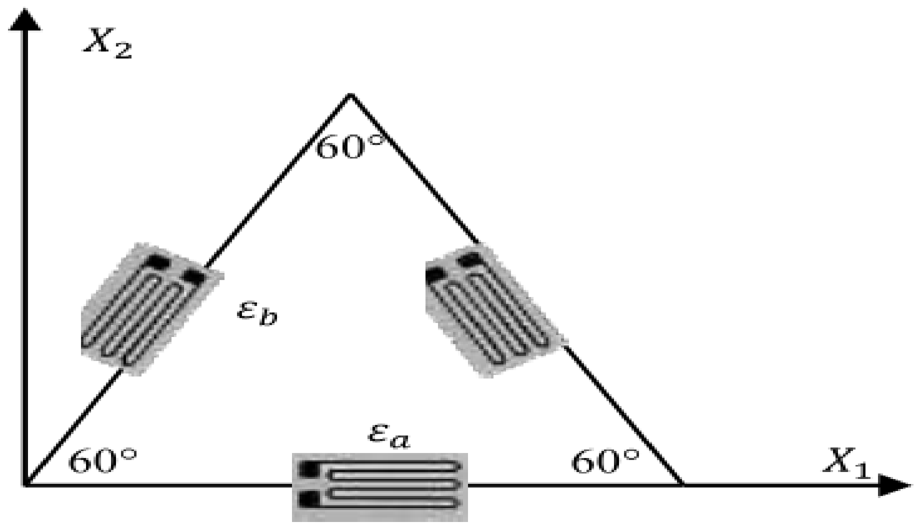
6- Représentation dans le plan de Mohr:



7- Angle entre les deux repères: Le cercle de Mohr montre que l'angle entre le repère principal et le repère `(2)` est de 90° alors que le repère `(1)` coïncide avec le repère principal. D'où l'angle entre les deux repères `(1)` et `(2)` est de 45°.

Exercice 2:

$$\varepsilon_a = -0.3, \qquad \varepsilon_b = 0.4, \qquad \varepsilon_b = 0.2 \tag{5}$$



Le tenseur des déformations plan s'écrit

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \tag{6}$$

La direction de la dilatation ε_a:

$$\vec{n}_a = \begin{bmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

ce qui donne

$$\varepsilon_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_{11} = -0.03 \tag{8}$$

La direction de la dilatation ε_b:

$$\vec{n}_b = \begin{bmatrix} \cos 60 \\ \sin 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \tag{9}$$

et donc on a

$$\varepsilon_b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \left(\varepsilon_{11} + 2\sqrt{3}\varepsilon_{12} + 3\varepsilon_{22} \right) \tag{10}$$

La direction de la dilatation ε_c:

$$\vec{n}_c = \begin{bmatrix} \cos 120 \\ \sin 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \tag{11}$$

ce qui implique

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} -1 & \sqrt{3} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{array}\right]\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} -1 \\ \sqrt{3} \end{array}\right] = \frac{1}{4}\left(\varepsilon_{11} - 2\sqrt{3}\varepsilon_{12} + 3\varepsilon_{22}\right) \tag{12}$$

En remplaçant ε_{11} par ε_a on obtient deux équations à deux inconnues

$$4\varepsilon_b - \varepsilon_a = 2\sqrt{3}\varepsilon_{12} + 3\varepsilon_{22}, \qquad 4\varepsilon_c - \varepsilon_a = -2\sqrt{3}\varepsilon_{12} + 3\varepsilon_{22} \tag{13}$$

dont la solution est

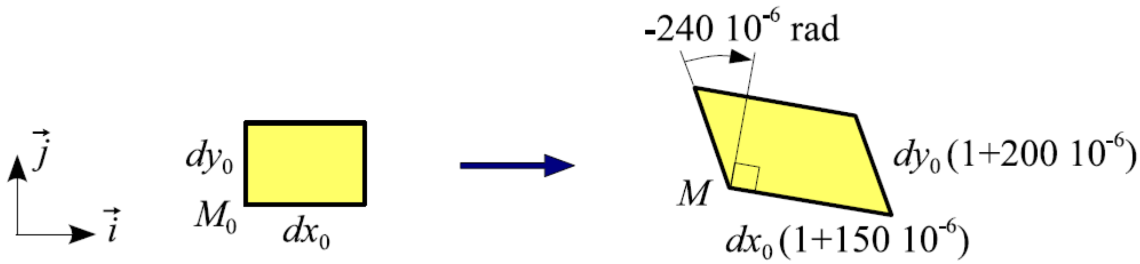
$$\varepsilon_{22} = \frac{4}{6}(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \frac{1}{3}\varepsilon_a = 0.5, \qquad \varepsilon_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_b - \varepsilon_c) = \frac{0.2}{\sqrt{3}} = 0.1155 \tag{14}$$

Finalement, le tenseur des déformations prend la forme

$$\varepsilon = \left[\begin{array}{cc} -3 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 5 \end{array}\right] 10^{-4} \tag{15}$$

Exercice 3:

1- Les composantes du tenseur des déformations dans le repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont représentées sur la figure ci-dessous:



2- Déformations dans les directions $\vec{n}_a$ et $\vec{n}_b$:

a. L'allongement unitaire dans la direction $\vec{n}_a$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(M, \vec{n}_a) &= [n_a]^T [\varepsilon(M)] [n_a] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} 150 & -120 & 0 \\ -120 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] 10^{-6} \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 0 \end{array}\right] \\ &= 286\ 10^{-6} \end{aligned} \tag{16}$$

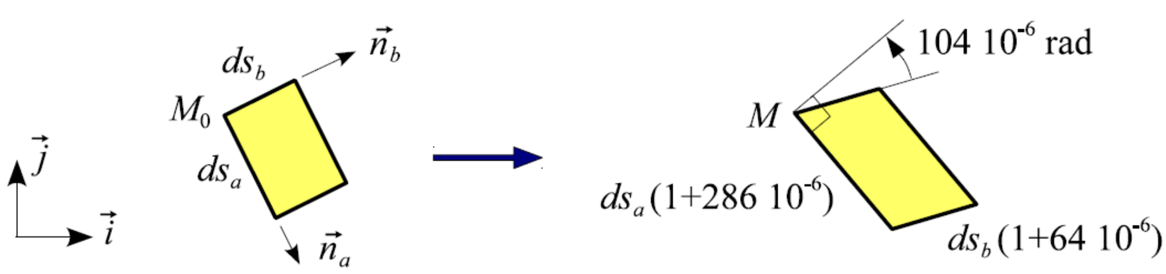
L'allongement unitaire dans la direction $\vec{n}_b$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(M, \vec{n_b}) &= [n_b]^T [\varepsilon(M)] [n_b] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} 150 & -120 & 0 \\ -120 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] 10^{-6} \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right] \\ &= 64\ 10^{-6} \end{aligned} \tag{17}$$

Le glissement dans les deux directions orthogonales $\vec{n}_a$ et $\vec{n}_b$:

$$\begin{aligned}\gamma(M,\vec{n}_a,\vec{n}_b) &= 2[n_b]^T\,[\varepsilon(M)]\,[n_a] \\ &= 2\frac{1}{\sqrt{5}}[\ 2\ 1\ 0\ ]\begin{bmatrix}150 & -120 & 0\\ -120 & 200 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} 10^{-6}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 0\end{bmatrix} \\ &= 104\ 10^{-6}\end{aligned} \tag{18}$$

b. Les composantes du tenseur des déformations dans le repère $(\vec{n}_a,\vec{n}_b,\vec{k})$ sont représentées sur la figure ci-dessous.



c. Dans le repère $(\vec{n}_a,\vec{n}_b,\vec{k})$, le tenseur des déformations est

$$[\varepsilon(M)]_{(\vec{n}_a,\vec{n}_b,\vec{k})} = \begin{bmatrix}150 & -120 & 0\\ -120 & 200 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} 10^{-6} \tag{19}$$

3- Déformations et directions principales: On a l'axe $\vec{k}$ est une direction principale alors

$$\vec{n}_3 = \vec{k}, \qquad \varepsilon_3 = 0 \tag{20}$$

Les déformations principales ε_1 et ε_2 sont les valeurs propres de la matrice

$$\begin{bmatrix}150 & -120\\ -120 & 200\end{bmatrix} 10^{-6} \tag{21}$$

qui sont

$$\varepsilon_{1,2} = \left(\frac{150+200}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(150-200)^2 + 4\times(-120)^2}\right)\ 10^{-6} \tag{22}$$

ou bien encore

$$\varepsilon_1 = 298\ 10^{-6}, \qquad \varepsilon_2 = 52\ 10^{-6} \tag{23}$$

La position angulaire des directions principales $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ est définie par

$$\tan\theta_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} = \frac{298-150}{-120} \tag{24}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} = \frac{52-150}{-120} \tag{25}$$

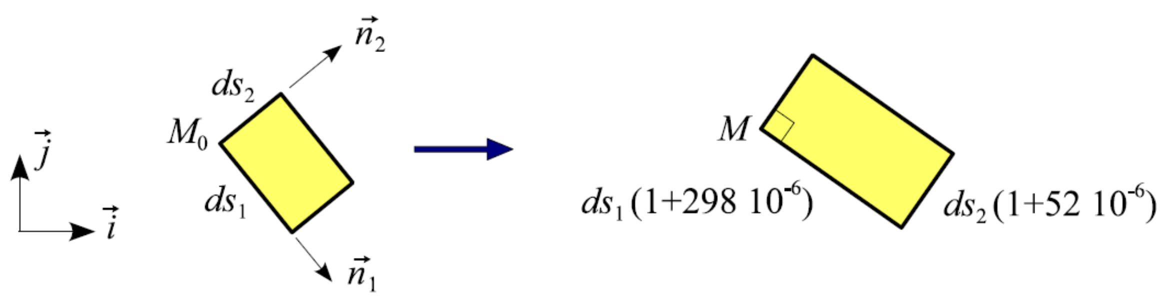
ce qui donne

$$\theta_1 = -50,88°, \qquad \theta_2 = 39,12° \tag{26}$$

Dans le repère principal, le tenseur des déformations est

$$[\varepsilon(M)]_{(\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3)} = \begin{bmatrix} 298 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-6} \tag{27}$$

4- Les composantes du tenseur des déformations dans le repère principal sont représentées sur la figure ci-dessous.



5- La variation relative de volume est

$$\varepsilon_v(M) = (150 + 200 + 0)\ 10^{-6} = (286 + 64 + 0)\ 10^{-6} = (298 + 52 + 0)\ 10^{-6} = 350\ 10^{-6} \tag{28}$$

<u>Exercice</u> 4:

1- En point M, l'état de contrainte est plan par rapport à l'axe $\vec{k}$. Les allongements unitaires ε_a, ε_b et ε_c s'écrivent en fonction des composantes du tenseur des déformations:

- Jauge a:

$$\vec{n}_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_a = \varepsilon(M, \vec{n}_a) = \varepsilon_{xx} \tag{29}$$

- Jauge b:

$$\vec{n}_b = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_b = \varepsilon(M, \vec{n}_b) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \varepsilon_{xy} \tag{30}$$

- Jauge c:

$$\vec{n}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_c = \varepsilon(M, \vec{n}_c) = \varepsilon_{yy} \tag{31}$$

Il s'ensuit que les composantes du tenseur des déformations sont

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a = -100\ 10^{-6} \tag{32}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_a = 400\ 10^{-6} \tag{33}$$

$$\varepsilon_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c = 2(-400\ 10^{-6}) - (-100\ 10^{-6}) - 400\ 10^{-6} = -1200\ 10^{-6} \tag{34}$$

2- Les composantes non nulles du tenseur des contraintes:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) = \frac{210000}{1-0.27^2}(-100 + 0.27 \times 400)\ 10^{-6} = 1.81\ \texttt{MPa} \tag{35}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) = \frac{210000}{1-0.27^2}(400 + 0.27 \times (-100))\ 10^{-6} = 84.49\ \texttt{MPa} \tag{36}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xy} = \frac{210000}{2(1+0.27)}(-1200\ 10^{-6}) = -99.21\ \texttt{MPa} \tag{37}$$

3- La composante ε_{zz}:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = -\frac{0,27}{1-0.27}(-100\ 10^{-6} + 400\ 10^{-6}) = -111\ 10^{-6} \tag{38}$$

Les composantes du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes dans le repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} -100 & -600 & 0 \\ -600 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & -111 \end{bmatrix} 10^{-6}, \qquad [\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 1.81 & -99.21 & 0 \\ -99.21 & 84.49 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \texttt{MPa} \tag{39}$$

4- Les contraintes principales: Puisque l'axe $\vec{k}$ est est une direction principale alors

$$\vec{n}_3 = \vec{k}, \qquad \sigma_3 = 0, \qquad \varepsilon_3 = -111\ 10^{-6} \tag{40}$$

Les autres contraintes principales σ_1 et σ_2 sont données par

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \\ &= \frac{1.81 + 84.49}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1.81 - 84.49)^2 + 4(-99.21)^2} \end{aligned} \tag{41}$$

ou bien encore

$$\sigma_1 = 150.63\ \texttt{MPa}, \qquad \sigma_2 = -64.33\ \texttt{MPa} \tag{42}$$

5- Les déformations principales ε_1 et ε_2:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{1}{210000}(150.63 - 0.27 \times (-64.33)) = 800.10^{-6} \tag{43}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = \frac{1}{210000}(-64.33 - 0.27 \times (150.63)) = -500.10^{-6} \tag{44}$$

6- La position angulaire de la direction principale $\vec{n}_1$ est donnée par l'équation

$$\tan\theta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} = \frac{150.63 - 1.81}{-99.21} \tag{45}$$

d'où

$$\theta_1 = -56.31^\circ \tag{46}$$