Universite Chouaib Doukkali
Faculte des Sciences
Department de Physique
El Jadida

Annee Universitaire : 2019/2020
Filière : Smp6
Physique : M34
Module : Mecanique des Milieux Continus

SERIE 1: Correction

Exercice 1 :

On recherche les élements du tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ à partir d'un certain nombre de mesures des forces effectuées sur les faces d'un domaine matériel. L'état de contrainte est supposé homogène et stationnaire. Le tenseur de Cauchy est toujours symétrique, donc il suffit de trouver les six inconnues scalaires $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$.

Elements diagonaux: Considérons la compostante noramele F_1 de la force appliquée sur la face arrière du tétraèdre (plan $x_1 = 0$) de normale sortante $-\vec{e}_1$. Le vecteur contrainte appliqué sur cette facette est donné par

$$\vec{T}(-\vec{e}_1) = \vec{\sigma} \cdot (-\vec{e}_1) \tag{1}$$

Puisque on a

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{2}$$

donc il s'ensuit que

$$\vec{T}(-\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{12} \\ -\sigma_{13} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Soit S la surface de la facette triangulaire, on peut intégrer la contrainte $\vec{T}(-\vec{e}_1)$ sur toute la surface de la facette pour obtenir une force. La composante normale F_1 est donnée par projection sur la normale, c'est-à-dire par produit scalaire avec le vecteur normal sortant de la facette:

$$F_1 = S\ (\vec{T}(-\vec{e}_1) \cdot (-\vec{e}_1)) = S\ \sigma_{11} \tag{4}$$

En général, a surface d'un triangle est le produit de sa base par sa hauteur. Donc, la surface de la facette est $S = \frac{c^2}{2}$, ce qui permet d'écrire

$$\sigma_{11} = \frac{2F_1}{c^2} \tag{5}$$

De la même manière sur les facettes de normales $-\vec{e}_2$ et $-\vec{e}_3$, on trouve

$$\sigma_{22} = \frac{2F_2}{c^2}, \qquad \sigma_{33} = \frac{2F_3}{c^2} \tag{6}$$

Elements non-diagonaux: On considère la faccette restante dont la normale sortante $\vec{n}$ est un vecteur unitaire et colinière à la direction $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Par conséquent ce vecteur est de forme $\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}$ où a est un réel donné par l'unitarité

$$\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = 1 \tag{7}$$

ce qui implique $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$. La normale sortante à la facette est donc le vecteur

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Il faut déterminer la surface S' de cette facette. En effet, le traingle est equilatéral de côté $c\sqrt{2}$, donc on obtient

$$S' = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{coté})^2 = \frac{c^2\sqrt{3}}{2} \tag{9}$$

Puisque l'état de contrainte est homogène donc le vecteur contrainte subit par cette facette en n'importe quel point est donné par

$$\vec{T}(\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} \tag{10}$$

Tout calcul fait on trouve

$$\vec{T}(\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} \\ \sigma_{12} + \sigma_{22} + \sigma_{23} \\ \sigma_{13} + \sigma_{23} + \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{11}$$

La force subit par la facette $\vec{G}$ est le produit du vecteur contrainte $\vec{T}(\vec{n})$ par la surface S'

$$\vec{G} = S' \; \vec{T}(\vec{n}) \tag{12}$$

ce qui donne

$$\vec{G} = \frac{S'}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} \\ \sigma_{12} + \sigma_{22} + \sigma_{23} \\ \sigma_{13} + \sigma_{23} + \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{13}$$

ou bien

$$G_1 = \frac{S'}{\sqrt{3}} (\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13}) \tag{14}$$

$$G_2 = \frac{S'}{\sqrt{3}} (\sigma_{12} + \sigma_{22} + \sigma_{23}) \tag{15}$$

$$G_3 = \frac{S'}{\sqrt{3}} (\sigma_{13} + \sigma_{23} + \sigma_{33}) \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

En remplacant les élements diagonaux pour avoir un système à trois inconnues $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$

$$\sigma_{12} + \sigma_{13} = \frac{2}{c^2}(G_1 - F_1) \tag{18}$$

$$\sigma_{12} + \sigma_{23} = \frac{2}{c^2}(G_2 - F_2) \tag{19}$$

$$\sigma_{13} + \sigma_{23} = \frac{2}{c^2}(G_3 - F_3) \tag{20}$$

qui peut être résolu pour avoir les élements suivants

$$\sigma_{12} = \frac{1}{c^2}\left[(G_1 - F_1) + (G_2 - F_2) - (G_3 - F_3)\right] \tag{21}$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{c^2}\left[(G_1 - F_1) - (G_2 - F_2) - (G_3 - F_3)\right] \tag{22}$$

$$\sigma_{23} = \frac{1}{c^2}\left[-(G_1 - F_1) + (G_2 - F_2) - (G_3 - F_3)\right] \tag{23}$$

Exercice 2:

A. Pour l'expérience de chargement `(a)`, les équations vectorielles sont

$$\vec{T}(\vec{X}, \vec{e}_1) = 0, \qquad \vec{T}(\vec{X}, \vec{e}_2) = \sigma_0 \vec{e}_3, \qquad \vec{T}(\vec{X}, \vec{e}_3) = \sigma_0 \vec{e}_2 \tag{24}$$

Puisque

$$\vec{T}(\vec{X}, \vec{e}_1) = \overline{\overline{\sigma}}_a \cdot \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = 0 \tag{25}$$

il vient donc

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \tag{26}$$

De la même facons on a

$$\vec{T}(\vec{X}, \vec{e}_2) = \overline{\overline{\sigma}}_a \cdot \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \sigma_0 \vec{e}_3 \tag{27}$$

qui donne

$$\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0, \qquad \sigma_{23} = \sigma_0 \tag{28}$$

Ainsi que pour

$$\vec{T}(\vec{X}, \vec{e}_3) = \overline{\overline{\sigma}}_a \cdot \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_0 \vec{e}_2 \tag{29}$$

qui implique

$$\sigma_{13} = \sigma_{33} = 0, \qquad \sigma_{23} = \sigma_0 \tag{30}$$

Finallement on trouve le tenseur de Cauchy dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$\overline{\overline{\sigma}}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Remarque : On peut trouver le même résultat en calculant directement le tenseur des contraintes $\sigma_{ij} = \vec{T}_i \cdot \vec{e}_j$.

En utilisant le même raisonnement comme en haut pour trouver les autres tenseurs

$$\overline{\overline{\sigma}}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \overline{\overline{\sigma}}_c = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_0 & 0 \\ \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

B. Maintenant on supose que les trois expériences ont été effectué simultanément en superposant les trois systèmes de forces.

1- Notons que la superposition de plusieurs états des contraintes correspond à la somme des tenseurs des contraintes correspondants. Donc la superposition des chargements (`a, b, c`) donne le tenseur des contraintes

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}_a + \overline{\overline{\sigma}}_b + \overline{\overline{\sigma}}_c = \sigma_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

2- Le vecteur contrainte appliqué à la facette définie par cette normale unitaire est

$$\vec{T}(\vec{X}, \vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = 2\sigma_0 \vec{n} \tag{34}$$

3- On cherche un vecteur contrainte $\vec{T}(\vec{X}, \vec{u})$ appliqué à une facette de normale $\vec{u}$. D'après les données on a

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 = u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3 = u_1 + u_2 + u_3 \tag{35}$$

Le vecteur contrainte est

$$\vec{T}(\vec{X}, \vec{u}) = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{u} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -\sigma_0 \vec{u} \tag{36}$$

4- D'après les formules précédentes, on peut formuler plusieurs observations. En effet,

- A partir d'Eq (34) on voit que la direction $\vec{n}$ est une des directions principales de contrainte. Le vecteur unitaire $\vec{n}$ est donc l'un des vecteurs de la base principale de contraintes, et la contrainte principale correspondante est égale à $2\sigma_0$.

- Eq (36) nous permet de constater que $-\sigma_0$ est une racine double et que le tenseur de Cauchy est

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2\sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_0 \end{bmatrix}_{\texttt{base principale}} \tag{37}$$

  où la base principale est formée du vecteur $\vec{n}$ et de tout couple de vecteurs perpendiculaires appartenant au plan normal à $\vec{n}$.

5- Posons $\sigma_1 = 2\sigma_0$ et $\sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_0$, donc le tricercle de Mohr correspondant à cet état des contraintes est représenté dans la Figure 1 pour $\sigma_0 > 0$. Puisque les valeurs propres σ_1 et σ_2 sont confondues, il vient que le tricercle se résume à un seul cercle.

6- La contrainte de cisaillement maximale et la contrainte moyenne sont données par

$$\tau_{\texttt{max}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{3}{2}\sigma_0 \tag{38}$$

$$\tau_{\texttt{moy}} = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\overline{\overline{\sigma}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0 \tag{39}$$

La contrainte moyenne est nulle, donc le tenseur des contraintes n'a pas de partie sphérique et le deviateur de $\overline{\overline{\sigma}}$ est égal à $\overline{\overline{\sigma}}$.

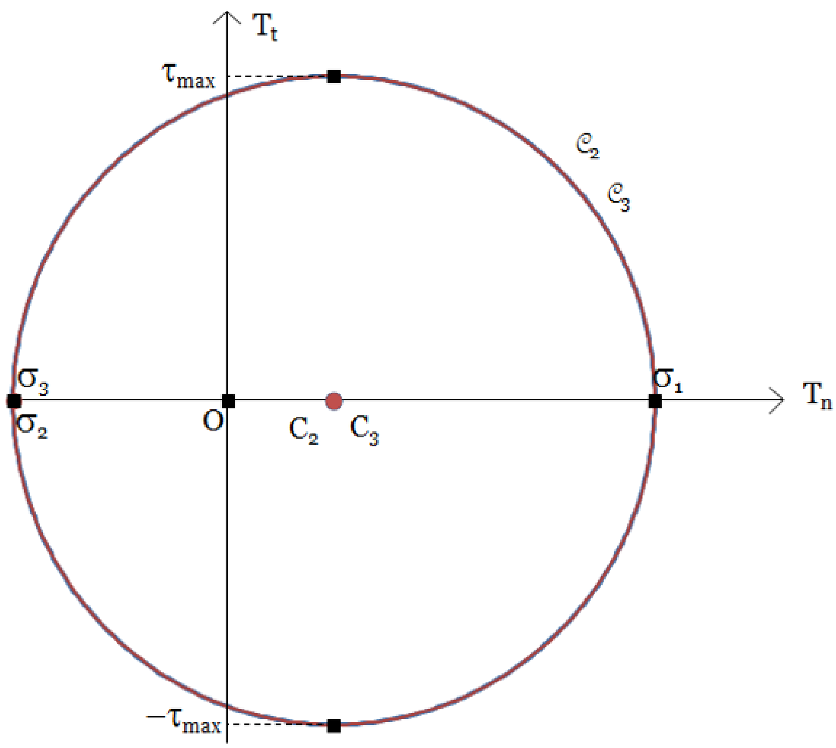

Figure 1: Tricercle de Mohr de centres $C_2 = C_3$.

Exercice 3:

1- D'après la Figure la matrice de contraintes en P dans le repère (xyz) est donnée par

$$\overline{\overline{\sigma}}_{|xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 36 & 0 \\ 36 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

2- Les éléments principaux des contraintes: On a un état des contraintes plan dont la facette z est donc principale et par suite $\sigma_3 = 0$. Les deux autres valeurs principales sont données par le déterminent

$$\det(\overline{\overline{\sigma}}_{|xyz} - \lambda \mathbb{I}) = 0 \tag{41}$$

ce qui donne

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 4\sigma_{12}^2} = 55MPa \tag{42}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 4\sigma_{12}^2} = -20MPa \tag{43}$$

La direction propre $\vec{X}$ peut être déterminée par l'angle $\theta = (\vec{x}, \vec{X})$, tel que

$$\tan\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_{11}}{\sigma_{12}} \tag{44}$$

ce qui donne

$$\tan\theta = \frac{55 - 7}{36}, \qquad \theta = 53°13 \tag{45}$$

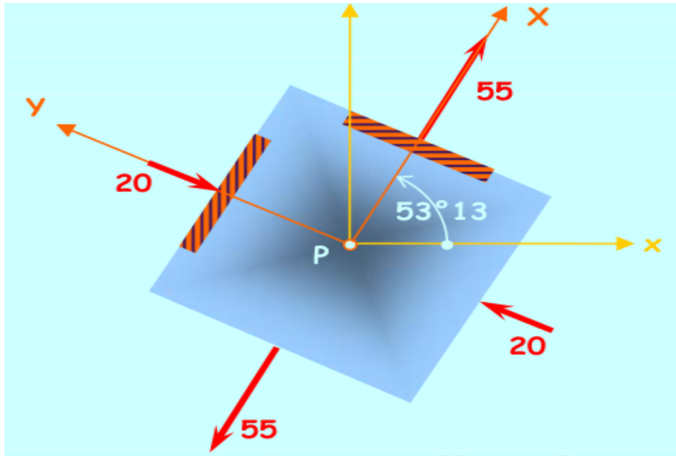

Figure 2: Angle $\theta = (\vec{x}, \vec{X})$.

Le tenseur de contraintes dans le repère principal (X, Y, Z) est

$$\overline{\overline{\sigma}}_{|XYZ} \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

3- On se place dans le plan des contraintes (plan xy).

a. Les composantes du vecteur contrainte, les contraintes normale et tangentielle s'exerçant sur un plan de coupe dont la normale fait un angle de 30° par rapport à l'axe x:

`Les composantes du vecteur contrainte:` D'après la relation de Cauchy on peut avoir

$$\vec{\Phi}_{h|_{xyz}} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{h} = \begin{bmatrix} 7 & 36 & 0 \\ 36 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30 \\ \sin 30 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{47}$$

ce qui implique les composantes

$$\vec{\Phi}_{h|_{xyz}} = \begin{bmatrix} \Phi_{xh|_{xyz}} \\ \Phi_{yh|_{xyz}} \\ \Phi_{zh|_{xyz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7\cos 30 + 36 \sin 30 \\ 36 \cos 30 + 28 \sin 30 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.062 \\ 45.177 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Mpa} \tag{48}$$

`Composantes normale et tengencielle:` On utilise les relations

$$\sigma_{hh} = {}^t\vec{h}\, \overline{\overline{\sigma}}\, \vec{h} = \begin{bmatrix} \cos 30 & \sin 30 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 36 & 0 \\ 36 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30 \\ \sin 30 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$\sigma_{th} = {}^t\vec{t}\, \overline{\overline{\sigma}}\, \vec{t} = \begin{bmatrix} -\sin 30 & \cos 30 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 36 & 0 \\ 36 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin 30 \\ \cos 30 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{50}$$

donc on trouve

$$\sigma_{hh} = 7\cos^2 30 + 28 \sin^2 30 + 2.36 \sin 30 \cos 30 = 43.42 \text{ MPa} \tag{51}$$

$$\sigma_{th} = -(7 - 28) \sin 30 \cos 30 + 36(\cos^2 30 - \sin^2 30) = 27.09 \text{ MPa} \tag{52}$$

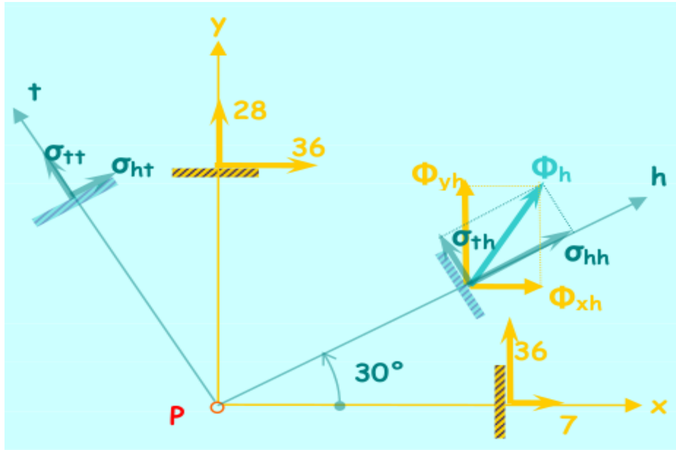

Figure 3: Composantes normales tangentielles des contraintes.

Ces résultats sont représentés dans Figure 3.

b. Les normales aux plans de coupe sur lesquels s'exercent les contraintes de cisaillement maximal, la valeur de ce cisaillement et la valeur de la contrainte normale correspondante: Pour cela on utilise les relations

$$\sigma_{hh} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{xy} \sin 2\theta \tag{53}$$

$$\sigma_{th} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{xy} \cos 2\theta \tag{54}$$

qui donne

$$\overline{\overline{\sigma}}_{|thz} = \begin{bmatrix} 43.42 & 27.09 & 0 \\ 27.09 & -8.42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{55}$$

qui sont représentés dans Figure 4.

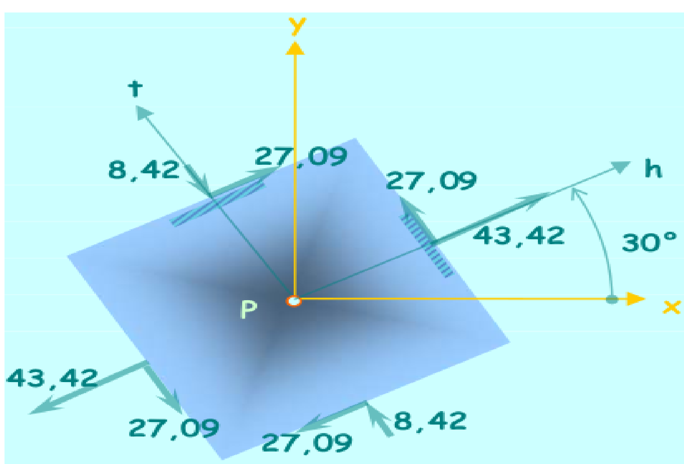

Figure 4: Elements du tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}_{|thz}$.

Les facettes sur lesquelles s'exercent les cisaillements maximums sont les plans bissecteurs des dièdres principaux. La valeur de ces cisaillements principaux est égale, en module, à la demie différence des contraintes principales dans chacun des plans principaux. La valeur de la contrainte normale associée à cette facette est la demie somme, voir Figure 5. Il vient donc

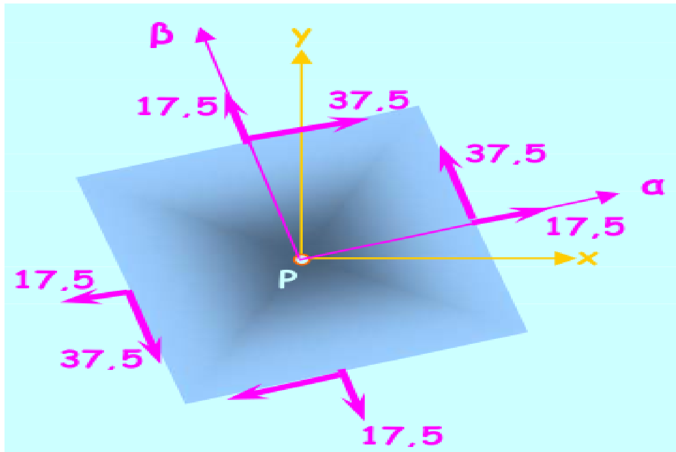

Figure 5: Normales aux plans de coupe.

$$\hat{\Psi} = \pm 45^\circ \tag{56}$$

$$\tau_{\max} = \frac{55+20}{2} = 37.5\text{MPa} \tag{57}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{55-20}{2} = 17.5\text{MPa} \tag{58}$$

ce qui donne

$$\overline{\overline{\sigma}}_{|thz} = \begin{bmatrix} 17.5 & -37.5 & 0 \\ -37.5 & 17.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{59}$$

Le résumé des différents résultats obtenus est representé dans Figure 6.

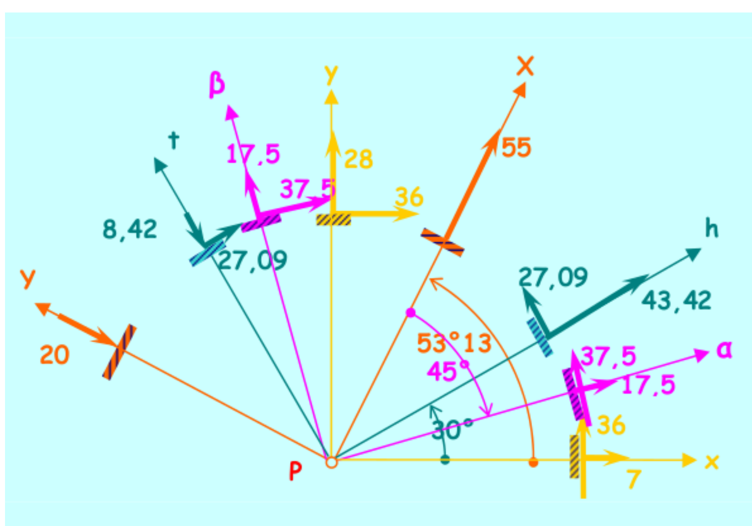

Figure 6: Resultats des questions **a** et **b**.

4- On reprend le problème avec le cercle de MOHR: Cette représentation nécessite la connaissance de 2 vecteurs contraintes s'exercant sur 2 facettes orthogonales. Dans notre cas le tenseur des contraintes est

$$\overline{\overline{\sigma}}_{|xyz} = \begin{bmatrix} 7 & 36 & 0 \\ 36 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{60}$$

Puisque les deux facettes x et y sont orthogonales, en plus les trois 'elements eu tenseur de contraintes sont donnés par

$$\sigma_{xx} = 7 \text{ MPa}, \qquad \sigma_{yy} = 28 \text{ MPa}, \qquad \sigma_{xy} = 36 \text{ MPa} \tag{61}$$

alors pour utiliser la representation graphique de MOHR, on demande de

1. tracer les axes σ_{hh} et σ_{th} et adopter une échelle $1cm = 10MPa$
2. positionner les points $m_x(7, 36)$ et $m_y(28, -36)$.
3. tracer le diamètre $m_x m_y$ du cercle. Son intersection avec l'axe des abscisses donne le centre du cercle I_Z
4. tracer le cercle C_Z de centre I_Z et de rayon m_x
5. chercher les intersections du cercle C_Z avec l'axe des abscisses, qui donnent les points m_X et m_Y caractérisants les facettes principales du plan des contraintes. Ils sont $\overline{Om}_X = 55 = \sigma_X$, $\overline{Om}_Y = -20 = \sigma_Y$ avec $2\hat{\Psi} = -106°26$.

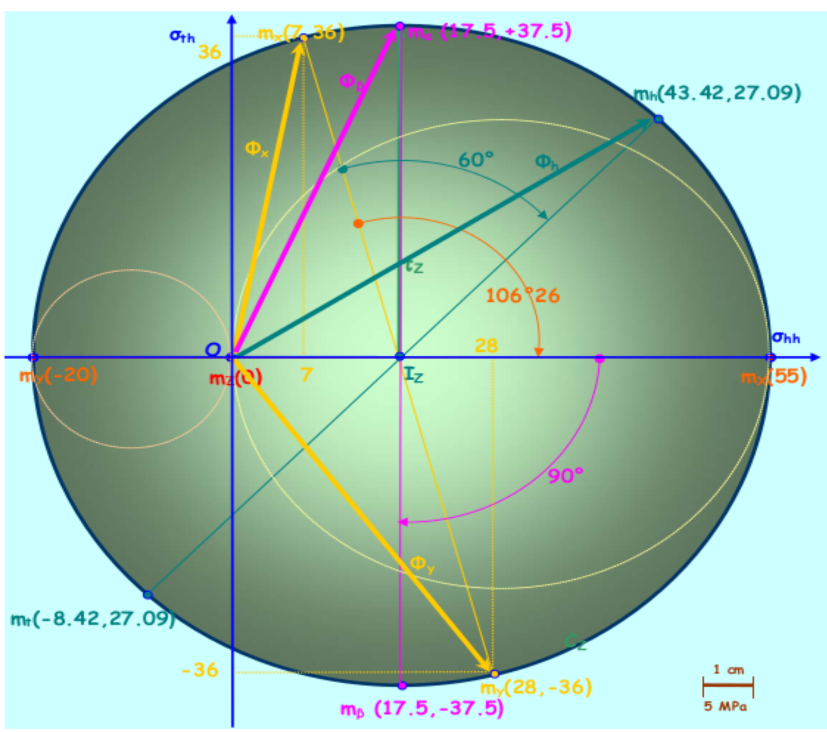

Figure 7: Représentation de MOHR.