UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTMENT DE PHYSIQUE
EL JADIDA

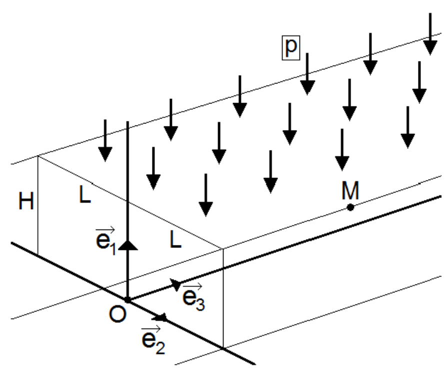
ANNEE UNIVERSITAIRE : 2019/2020
FILIÈRE : SMP6
PHYSIQUE : M34
MODULE : MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

SERIE 3

Exercice 1: On considère un massif rectangulaire de grande longueur comme illustré sur la figure ci-dessous, qui est soumis aux hypothèses suivantes:

- Le comportement élastique est linéaire de paramètres E et ν.
- La face supérieure est soumise à une pression uniforme p.
- La face inférieure en appui glissant et non-frottant, fixée seulement sur l'axe (O, $\vec{e}_3$).
- Les forces de volume sont négligeables.
- Il y a des petites perturbations.
- On se place dans la zone centrale du massif pour se prémunir des effets de bord.
- Le champ de déplacement est donné par

$$\vec{U} = (AX_1 + CX_2)\vec{e}_1 + (-CX_1 + BX_2)\vec{e}_2 \quad (1)$$



1. Représenter la section du massif contenant le point M, ainsi que les conditions aux limites sur cette section.

2. Calculer le tenseur des déformations $\bar{\bar{\varepsilon}}$. Donner ses valeurs principales et ses directions principales. De quel type de déformation s'agit-il?

3. Exprimer analytiquement le tenseur de Cauchy $\bar{\bar{\sigma}}$, (utiliser les coefficients de Lamé pour simplifier les notations).

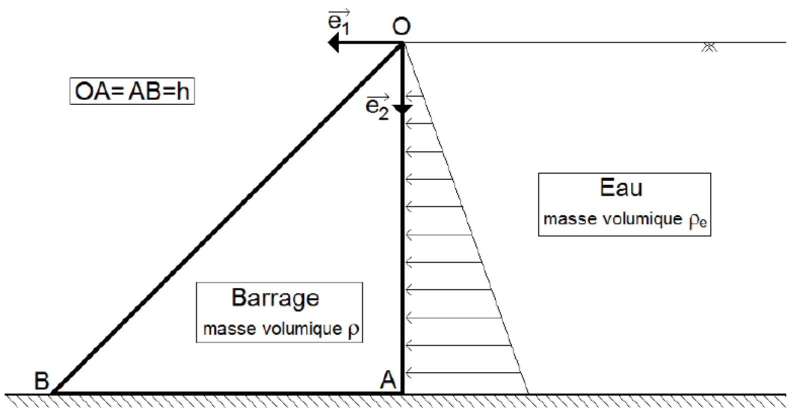
4. Utiliser les conditions aux limites en contraintes pour calculer A et B ainsi que celles en déplacement pour calculer C.

5. On suppose que le massif en acier avec ($E = 210000MPa$, $\nu = 0.3$) et on donne les dimensions de la section ($L = 0.2m$, $H = 0.15m$) asinsi que le chargement $p = 500MPa$. Calculer le vecteur déplacement du point M.

6. Tracer la déformée de la section.

Exercice 2: Soit un barrage poids de section triangulaire, dont la géométrie est representée sur la figure ci-dessous. Pour rendre le problème plan, on considère en particulier une "tranche" de ce barrage située suffisamment loin des massifs d'ancrage latéraux. Le barrage est soumis à son poids $\rho_b g$ et à la poussée $\rho_e g x_2$ de l'eau. La surface de l'eau est située à une hauteur h égale à celle du barrage. A sa base, le barrage est parfaitement encastré. On se suppose que

- le matériau composant le barrage est élastique linéaire et isotrope de paramètres E et ν
- la pression atmosphérique est négligeable.



1. Expliquer pourquoi il s'agit d'un problème de déformation plane et donner la forme générale des vecteur déplacement $\vec{U}$, le tenseur des déformations $\bar{\bar{\varepsilon}}$ et le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$.

2. Décrire précisément les conditions aux limites d'une "tranche" du barrage. Ecrire les équations d'équilibre mécanique, d'abord à l'intérieur du domaine puis au niveau de ses conditions limites en contraintes.

3. On postule que tous les termes du tenseur des contraintes sont des fonctions linéaires des coordonnées x_1 et x_2. Montrer que ce tenseur vérifie l'équation de Beltrami, et donc la solution du problème élastique.

4. A l'aide de la loi de Hooke, montrer que $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$.

5. A l'aide des équations d'équilibre et des conditions aux limites en contraintes, calculer $\bar{\bar{\sigma}}$ en tout point du système. A l'aide de la loi de Hooke, en déduire $\bar{\bar{\varepsilon}}$ en tout point du système.

6. Montrer que la contrainte tangentielle la plus intense (en valeur absolue) du système est obtenue au point B et calculer cette contrainte.

Rappel: L'équation de Beltrami est donnée par

$$\Delta\bar{\bar{\sigma}} + \frac{1}{1+\nu}\mathrm{grad}\left[\mathrm{grad}(\mathrm{Tr}\bar{\bar{\sigma}})\right] = 0 \qquad (2)$$

avec le Laplacien du tenseur $\Delta\bar{\bar{\sigma}}$ est un tenseur des Laplaciens de composantes de $\bar{\bar{\sigma}}$, c'est-à-dire $(\Delta\bar{\bar{\sigma}})_{ij} = \Delta(\sigma_{ij})$.