

MECANIQUE DE SOLIDE : THEOREMES GENERAUX

Exercice 1 : Arbre de réacteur

Le système étudié ici et représenté est un boîtier de transfert de puissance d'un réacteur d'aviation. L'objectif de l'étude est de montrer l'opportunité de l'équilibrage dynamique de la pièce 4 présentant un défaut de coaxialité. Cet arbre distribue une partie de la puissance fournie par le réacteur.

Au bâti S_0 , on associe le repère $R_0 (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, repère lié à l'avion, \vec{y} étant vertical ascendant.

Le solide S_4 (figure 1 et 2) est lié au bâti S_0 par une liaison rotule en A (supposée parfaite) et une liaison linéaire anulaire (supposée parfaite) d'axe (B, x_4) tel que $\vec{x}_4 = \vec{x}$. On associe à S_4 le repère $R_4 (O, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ et on notera θ l'angle de rotation : $\theta = (\vec{y}, \vec{y}_4)$

Le solide S_4 est soumis en D à l'action de l'arbre 3 et en E à l'action de l'arbre 5 modélisées en C par le torseur :

$$\{\zeta(T_5 \rightarrow S_4)\} = \left\{ \begin{array}{l} R_{5 \rightarrow 4} = F_X \vec{x} + F_Y \vec{y} + F_Z \vec{z} \\ \vec{m}_{5 \rightarrow 4}(C) = C_m \vec{x} \end{array} \right\}$$

L'action de la pompe sur le solide S_4 est appliquée en O et donnée par le torseur :

$$\{\zeta(P \rightarrow S_4)\} = \left\{ \begin{array}{l} R_{P \rightarrow 4} = \vec{0} \\ \vec{m}_{P \rightarrow 4}(O) = C_r \vec{x} \end{array} \right\}$$

I. Etude cinétique du solide S_4

Le solide **S4** est constitué de deux solides, un pignon (solide S_{4a}) et un arbre tubulaire présentant un défaut d'excentration (solide S_{4b}) : $S_4 = S_{4a} \cup S_{4b}$ (**voir figures 1, 2, 3**). Le matériau constituant ce solide est de masse volumique ρ .

Solide S_{4a} :

Le solide S_{4a} est assimilé à un cylindre creux d'axe (C, \vec{x}) , de longueur L , de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e , de centre de gravité C et de masse m_{4a} . La matrice d'inertie du solide S_{4a} en C est donnée par :

$$I(C, S_{4a}) = \begin{bmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & B_a & 0 \\ 0 & 0 & B_a \end{bmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)}$$

Solide S_{4b} :

Le solide S_{4b} est limité par un cylindre extérieur d'axe (A, \vec{x}) , de longueur b , de rayon $R_e = r_i$ et par un cylindre intérieur d'axe (A_T, \vec{x}) , de longueur b et de rayon R_i . A_T est défini par le vecteur position $\vec{AA}_T = e \vec{y}_4$ (figure 3). La masse de S_{4b} est m_b . On note G le centre de gravité de S_{4b} , défini par le vecteur position $\vec{OG} = x_G \vec{x}_4 + y_G \vec{y}_4$.

1.1 Déterminer x_G et y_G en fonction de e, b, R_e, R_i .

1.2 Montrer que la matrice d'inertie de S_{4b} est de la forme :

$$I(O, S_{4b}) = \begin{bmatrix} A_b & -F_b & 0 \\ -F_b & B_b & 0 \\ 0 & 0 & C_b \end{bmatrix}_{(\vec{x}_4 \ \vec{y}_4 \ \vec{z}_4)}$$

1.3 Exprimer les termes A_b, B_b, C_b et F_b en fonction des paramètres géométriques et des masses.

1.4 Donner la matrice d'inertie du solide S_4 en O dans la base $B_4(\vec{x}_4 \ \vec{y}_4 \ \vec{z}_4)$ en fonction de $A_b, B_b, C_b, F_b, A_a, B_a, m_{4a}$ et c .

Indication : Si S représente le cylindre plein de rayon R_e de masse M et S_i représente le cylindre de matière qui a été enlevée (de rayon R_i) de masse m_i alors : $S = S_i \cup S_{4b}$ et $M = m_b + m_i$

On donne les moment d'inertie du cylindre S : $I_{Ox_4} = \frac{MR_e^2}{2}$, $I_{Oy_4} = I_{Oz_4} = \frac{M}{4} \left(R_e^2 + \frac{b^2}{3} \right)$

II. Etude dynamique du solide S_4

$\vec{g} = -g\vec{y}$ désigne l'accélération de la pesanteur. Dans toute la suite du problème, l'avion se déplace en translation rectiligne uniforme par rapport à un repère lié à la terre supposé galiléen. Le repère $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est alors considéré lui aussi comme galiléen.

2.1 Effectuer le bilan des actions mécaniques s'exerçant sur le solide S_4 en précisant pour chacune d'elle le torseur associé.

2.2 Enoncer le Principe Fondamental de la Dynamique pour un solide.

2.3 Déterminer l'accélération du centre de gravité G , écrite dans la base $B_4(\vec{x}_4 \ \vec{y}_4 \ \vec{z}_4)$.

2.4 Déterminer le moment dynamique en O du solide S_4 par rapport à R_0 , écrit dans la base $B_4(\vec{x}_4 \ \vec{y}_4 \ \vec{z}_4)$.

2.5 Par application du PFD en O au solide S_4 , écrire les 6 équations du mouvement en projection dans la base $B_4(\vec{x}_4 \ \vec{y}_4 \ \vec{z}_4)$.

III. Etude énergétique du solide S_4

3.1 Calculer l'énergie cinétique de S_4

3.2 Calculer la puissance des force extérieures appliquées à S_4 .

3.4 Ecrire le théorème de l'énergie cinétique du mouvement de S_4 dans R_0 . Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

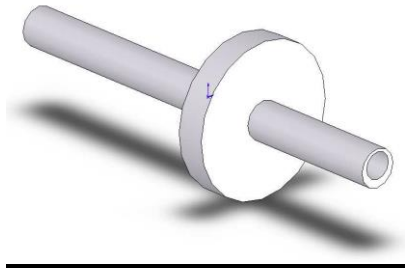


Figure 1

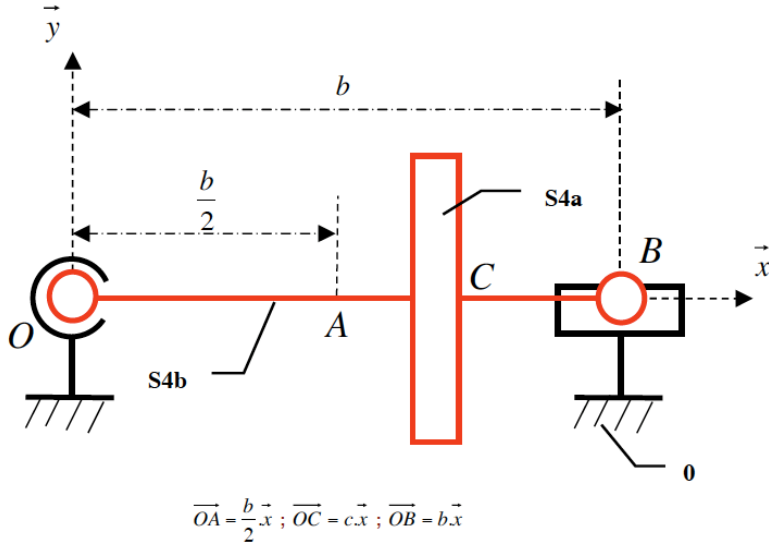


Figure 2

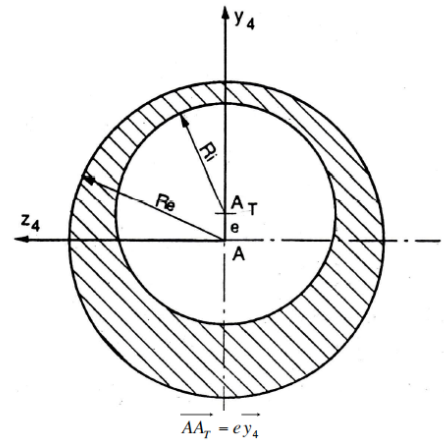


Figure 3

Liaisons mécaniques normalisées

Nature liaison et repère associé	Schématisation plane	Schématisation spatiale	Torseur cinématique	Torseur des actions mécaniques transmissibles
encastrement			$\begin{cases} \vec{\omega} = 0 \\ \vec{V}(A) = 0 \\ \forall A \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$
liaison pivot d'axe (A, \vec{x})			$\begin{cases} \vec{\omega} = p\vec{x} \\ \vec{V}(A) = 0 \\ \forall M \in (A, \vec{x}) \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$
liaison glissière de direction \vec{x}			$\begin{cases} \vec{\omega} = 0 \\ \vec{V}(A) = u\vec{x} \\ \forall A \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R} = Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$
liaison hélicoïdale d'axe (A, \vec{x})			$\begin{cases} \vec{\omega} = p\vec{x} \\ \vec{V}(A) = u\vec{x} \\ u = kp, \forall M \in (A, \vec{x}) \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \\ L = -kX \end{cases}$
liaison pivot glissant d'axe (A, \vec{x})			$\begin{cases} \vec{\omega} = p\vec{x} \\ \vec{V}(A) = u\vec{x} \\ \forall M \in (A, \vec{x}) \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R} = Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$
liaison sphérique à doigt d'axes (A, \vec{x}) et (A, \vec{y})			$\begin{cases} \vec{\omega} = p\vec{x} + q\vec{y} \\ \vec{V}(A) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = N\vec{z} \end{cases}$
liaison appui plan de normale \vec{x}			$\begin{cases} \vec{\omega} = p\vec{x} \\ \vec{V}(A) = v\vec{y} + w\vec{z} \\ \forall A \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} \\ \vec{M}(A) = M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$
liaison sphérique de centre A			$\begin{cases} \vec{\omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ \vec{V}(A) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = 0 \end{cases}$
liaison linéaire rectiligne de direction normale \vec{x} et d'axe (A, \vec{y})			$\begin{cases} \vec{\omega} = p\vec{x} + q\vec{y} \\ \vec{V}(A) = v\vec{y} + w\vec{z} \\ \forall M \in (A, \vec{x}, \vec{y}) \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} \\ \vec{M}(A) = N\vec{z} \end{cases}$
liaison linéaire annulaire de centre A, de direction \vec{x}			$\begin{cases} \vec{\omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ \vec{V}(A) = u\vec{x} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R} = Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = 0 \end{cases}$
liaison ponctuelle de normale (A, \vec{x})			$\begin{cases} \vec{\omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ \vec{V}(A) = v\vec{y} + w\vec{z} \\ \forall M \in (A, \vec{x}) \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} \\ \vec{M}(A) = 0 \end{cases}$