UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
EL JADIDA

ANNEE UNIVERSITAIRE 2019/2020
TD - SMA 4 - Série 3

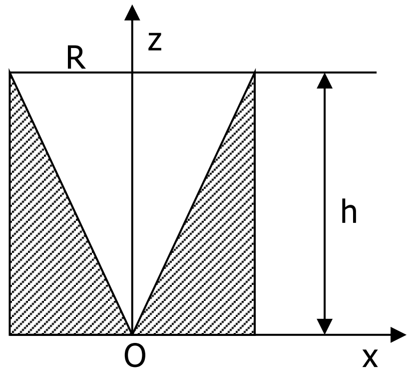
# MECANIQUE DE SOLIDE : CINETIQUE DU SOLIDE

## Exercice 1 : Matrice d'inertie d'un solide

On considère un solide (S) constitué par un cylindre de rayon R de hauteur h, présentant un évidemment ayant la forme d'un cône dont la base est commune avec l'une des bases du cylindre et dont le sommet O est le centre de l'autre base.

On désigne par m la masse de ce solide.

a) Déterminer la position du centre de gravité de (S)
b) Déterminer la matrice principale d'inertie I(O,S)
c) En déduire la matrice centrale d'inertie.




## Exercice 2 : Arbre de réacteur

Le solide **S4** est constitué de deux solides, un pignon (solide $\boldsymbol{S_{4a}}$) et un arbre tubulaire présentant un défaut d'excentration (solide $\boldsymbol{S_{4b}}$) : $S_4 = S_{4a} \cup S_{4b}$ (**voir figures 1, 2, 3**). Le matériau constituant ce solide est de masse volumique $\rho$ .

**Solide $S_{4a}$ :**

Le solide $\boldsymbol{S_{4a}}$ est assimilé à un cylindre creux d'axe $(C, \vec{x})$ , de longueur $L$, de rayon intérieur $r_i$ et de rayon extérieur $r_e$, de centre de gravité $C$ et de masse $m_{4a}$ . La matrice d'inertie du solide $\boldsymbol{S_{4a}}$ en C est donnée par :

$$I(C, S_{4a)} = \begin{bmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & B_a & 0 \\ 0 & 0 & B_a \end{bmatrix}_{(\vec{x}_4 \quad \vec{y}_4 \quad \vec{z}_4)}$$

**Solide $S_{4b}$ :**

Le solide $S_{4b}$ est limité par un cylindre extérieur d'axe $(A, \vec{x})$ , de longueur $b$, de rayon $R_e = r_i$ et par un cylindre intérieur d'axe $(A_T, \vec{x})$, de longueur b et de rayon $R_i$. $A_T$ est défini par le vecteur position $\overrightarrow{AA_T} = e\vec{y}_4$ (figure 3). La masse de $S_{4b}$ est $m_b$ . On note $G$ le centre de gravité de $S_{4b}$, défini par le vecteur position $\overrightarrow{OG} = x_G\vec{x}_4 + y_G\vec{y}_4$ .

1.1 Déterminer $x_G$ et $y_G$ en fonction de $e, b, R_e, R_i$ .

1.2 Montrer que la matrice d'inertie de $S_{4b}$est de la forme :

$$I(O, S_{4b)} = \begin{bmatrix} A_b & -F_b & 0 \\ -F_b & B_b & 0 \\ 0 & 0 & C_b \end{bmatrix}_{(\vec{x}_4 \quad \vec{y}_4 \quad \vec{z}_4)}$$

1.3 Exprimer les termes $A_b$, $B_b$, $C_b$ et $F_b$ en fonction des paramètres géométriques et des masses.

1.4 Donner la matrice d'inertie du solide $S_4$ en O dans la base $B_4(\vec{x}_4 \quad \vec{y}_4 \quad \vec{z}_4)$ en fonction de $A_b$, $B_b$, $C_b$, $F_b$, $A_a$, $B_a$, $m_{4a}$ et $c$.

Indication : Si $S$ représente le cylindre plein de rayon $R_e$ de masse M et $S_i$ représente le cylindre de matière qui a été enlevée (de rayon $R_i$) de masse $m_i$ alors : $S = S_i \cup S_{4b}$ et $M = m_b + m_i$

On donne les moment d'inertie du cylindre $S$ : $I_{ox_4} = \frac{MR_e^2}{2}$ , $I_{oy_4} = I_{oz_4} = \frac{M}{4}\left(R_e^2 + \frac{b^2}{3}\right)$

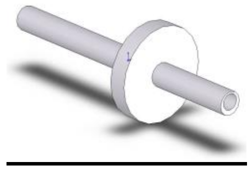
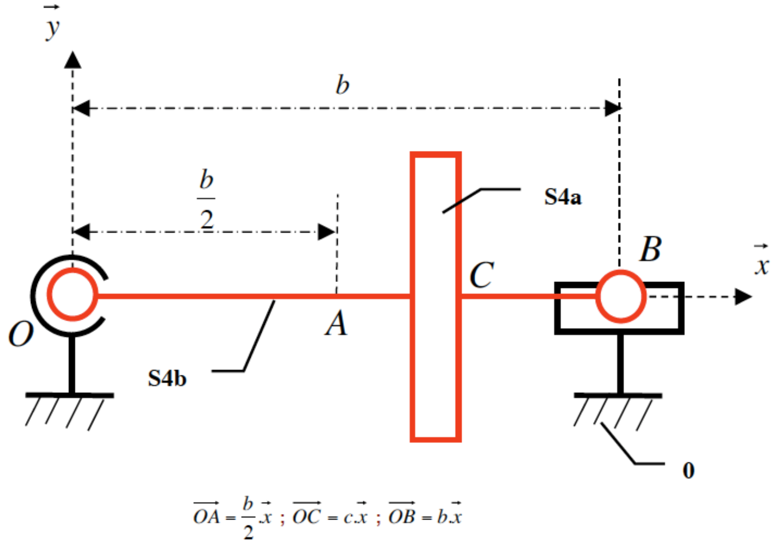


Figure 1



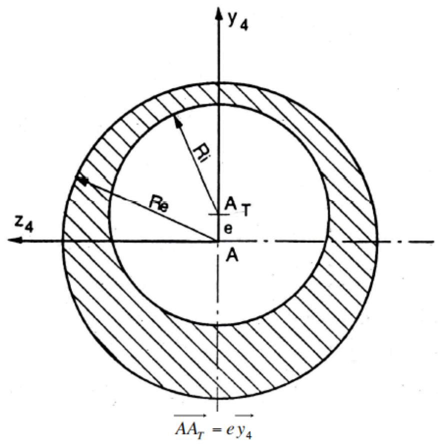




Figure 2 Figure 3

**Exercice 3 : Régulateur à boules :**

Un régulateur à boules, symétrique par rapport à son axe de rotation est représenté figure 2.

Soir $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié au bâti ($S_0$). L'axe ($S_1$) a une liaison pivot d'axe $(O,\vec{x})$ avec ($S_0$).

Soit $R_1(O,\vec{x},\vec{y_1},\vec{z_1})$ un repère lié à ($S_1$). Le bras ($S_2$) a une liaison pivot d'axe $(A,\vec{z_1})$ avec ($S_1$) telle que $\overrightarrow{OA}=a\vec{y_1}$. Soit $R_2(A,\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_1})$ un repère lié à ($S_2$). A l'extrémité du bras ($S_2$) est fixée une sphère (S) pleine et homogène de masse m de rayon r et de centre d'inertie G. On pose $\overrightarrow{AG}=l\vec{x_2}$

Le bras ($S_3$) a une liaison pivot d'axe $(B,\vec{z_1})$ avec ($S_2$) telle que $\overrightarrow{AB}=b\vec{x_2}$ et une autre liaison pivot d'axe $(C,\vec{z_1})$ avec le coulisseau ($S_4$) telle que le point C soit symétrique du point A par rapport à l'axe $(B,\vec{y_1})$. ($S_4$) a une liaison pivot glissant d'axe $(O,\vec{x})$ avec ($S_0$), et pour axe de symétrie matérielle $(O,\vec{x})$. Notons $G_4$ son centre d'inertie, M sa masse et I son moment d'inertie par rapport à $(O,\vec{x})$.

a) Déterminer le moment cinétique au point $G_4$ de ($S_4$) dans son mouvement par rapport à R.
b) Ecrire la matrice d'inertie du solide (S).
c) Déterminer le moment cinétique au point G de (S) dans son mouvement par rapport à R.
d) En déduire le moment cinétique au point A de (S) dans son mouvement par rapport à R.
e) Déterminer la projection sur $\vec{z_1}$ du moment dynamique au point A de (S) dans son mouvement par apport à R.