Université Chouaib Doukkali **Année universitaire 2019-2020**

Faculté des Sciences

Département de Physique

Electromagnétisme dans le vide

SMI4

Solution série n° : 3

Exercice -1

1. Le problème est un problème à symétrie cylindrique (ρ,θ,z),

Le problème invariant par translation suivant l'axe OZ (fil infini), donc $\vec{B}$ ne dépend pas de z ;

Le problème invariant par rotation d'angle θ quelconque autour de l'axe OZ, donc $\vec{B}$ ne dépend pas de θ ;

Donc $\vec{B}=\vec{B}(\rho)$.

Le plan $\Pi(\vec{e}_\rho,\vec{e}_z)$ est un plan de symétrie donc $\vec{B}\perp\Pi(\vec{e}_\rho,\vec{e}_z)$ soit $\vec{B}(\rho)=B(\rho)\vec{e}_\theta$

2. $I=J.S$

   <u>Densité de courant intérieur :</u> le courant circule à l'intérieure du cylindre de rayon R_1

   $S=\pi R_1^2$; $\vec{j}_{\text{int}}=\dfrac{I}{\pi R_1^2}\vec{e}_z$

   <u>Densité de courant extérieur</u> : le courant circule entre le cylindre de rayon R_2 et le cylindre de rayon R_3

   $S=\pi\left(R_3^2-R_2^2\right)$, $\vec{j}_{ext}=-\dfrac{I}{\pi\left(R_3^2-R_2^2\right)}\vec{e}_z$

3. Contour d'Ampère : contour circulaire C de rayon ρ perpendiculaire à l'axe OZ, centré sur l'axe OZ

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l}=\oint_C B(\rho)\vec{e}_\theta.dl\vec{e}_\theta=\oint_C B(\rho)dl=B(\rho)\oint_C dl=2\pi\rho B=\mu_0\sum I_{enlacés}$$

$$B(\rho)=\frac{\mu_0\sum I_{enlacés}}{2\pi\rho}$$

3.a $\rho\prec R_1$; $\sum I_{enlacés}=\vec{j}_{\text{int}}\pi\rho^2=\dfrac{I}{\pi R_1^2}.\pi\rho^2=I\dfrac{\rho^2}{R_1^2}$ d'où

$$B(\rho)=\frac{\mu_0}{2\pi\rho}.I\frac{\rho^2}{R_1^2}=\mu_0 I\frac{\rho}{2\pi R_1^2}$$

3.b $R_1 \prec \rho \prec R_2$; $\sum I_{enlacés}=I$ d'où $B(\rho)=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$

4.c $R_2 \prec \rho \prec R_3$; le courant enlacé est la somme des courants à l'intérieure du cylindre de rayon et R_1 et du courant qui circule entre les cylindres de rayon ρ et de rayon R_3 soit

$$\sum I_{enlacés}=I+\vec{j}_{ext}\pi\left(\rho^2-R_2^3\right)$$

$$=I-\frac{I}{\pi\left(R_3^2-R_2^3\right)}.\pi\left(\rho^2-R_2^3\right)$$

$$=I\left(1-\frac{\left(\rho^2-R_2^3\right)}{\left(R_3^2-R_2^3\right)}\right)$$

$$=I\frac{R_3^2-\rho^2}{R_3^2-R_2^3}$$

D'où $B(\rho)=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}.\dfrac{R_3^2-\rho^2}{R_3^2-R_2^3}$

3.d $\rho \succ R_3$ $\sum I_{enlacés}=I-I=0$ d'où B=0, blindage

Exercice-2

1. Même raisonnement que la première question du l'exercice -1 $\vec{B}(\rho)=B(\rho)\vec{e}_\theta$
2. Expression locale du théorème d'Ampère $\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}$

$$\vec{B}(\rho)=B(\rho)\vec{e}_\theta \longrightarrow \overrightarrow{rot}B(\rho)\vec{e}_\theta=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\rho}\left(\rho B(\rho)\right)\vec{e}_z$$

2.a $\rho<R$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}\Rightarrow\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\rho}\left(\rho B(\rho)\right)\vec{e}_z=\mu_0 j_0\left(1-\frac{\rho}{R}\right)\vec{e}_z \longrightarrow$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\rho}\left(\rho B(\rho)\right)=\mu_0 j_0\left(1-\frac{\rho}{R}\right)$$

Soit $\dfrac{\partial}{\rho}\left(\rho B(\rho)\right)=\mu_0 j_0\rho\left(1-\dfrac{\rho}{R}\right)=\mu_0 j_0\left(\rho-\dfrac{\rho^2}{R}\right) \longrightarrow$

$$\left(\rho B(\rho)\right)=\mu_0 j_0\left(\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{3}\frac{\rho^3}{R}\right)+cte$$

cte constante d'intégration

Sachant que $\rho B(\rho)_{(\rho=0)} = 0 \Rightarrow cte = 0$ soit $\rho B(\rho) = \mu_0 j_0 \left(\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{3}\frac{\rho^3}{R}\right)$

D'où $B(\rho) = \mu_0 j_0 \left(\frac{1}{2}\rho - \frac{1}{3}\frac{\rho^2}{R}\right)$ $\quad B(\rho)\vec{e}_\theta = \mu_0 j_0 \left(\frac{1}{2}\rho - \frac{1}{3}\frac{\rho^2}{R}\right)\vec{e}_\theta$

2.b $\rho > R$ $\longrightarrow$ $\vec{j} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{rot} B(\rho)\vec{e}_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\rho}\left(\rho B(\rho)\right)\vec{e}_z = \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$ $\longrightarrow$

$\frac{\partial}{\rho}\left(\rho B(\rho)\right) = 0$ $\longrightarrow$ $\rho B(\rho) = cte \Rightarrow B(\rho) = \frac{cte}{\rho}$

Sur la surface de séparation $\vec{j}_S = j_0\left(1 - \frac{R}{R}\right)\vec{e}_z = \vec{0}$ donc la composante tangentielle du champ magnétique est continue or ce dernier est suivant $\vec{e}_\theta$ donc tangentiel donc il est continue $\left(\vec{B}\left(\rho = R^+\right)\vec{e}_\theta - \vec{B}\left(\rho = R^-\right)\vec{e}_\theta = \vec{j}_S \wedge \vec{n} = \vec{0}\right)$

Donc $B\left(R^+\right) = B\left(R^-\right)$ soit $\mu_0 j_0 \left(\frac{1}{2}R - \frac{1}{3}\frac{R^2}{R}\right) = \frac{cte}{R}$

$cte = \mu_0 j_0 \frac{R^2}{6}$ d'où $B(\rho) = \mu_0 j_0 \frac{R^2}{6\rho}$ $\quad B(\rho)\vec{e}_\theta = \mu_0 j_0 \frac{R^2}{6\rho}\vec{e}_\theta$