## Correction

### Exercice 1

1) $\vec{\Omega}(S_1/S_0) = \dot{\theta}\,\vec{z}_0$

   $\vec{\Omega}(S_2/S_0) = \dot{\beta}\,\vec{z}_0$

2) L'abscisse du point B, $x_B$, dans le repère $R_0$ est constante

   $x_B = x_A + l\cos\beta = cte$

   d'où

   $$\dot{x}_B = \dot{x}_A - \dot{\beta}\,l\sin\beta = 0 \qquad \Rightarrow \dot{x}_A = \dot{\beta}\,l\sin\beta \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{\dot{x}_A}{\dot{\beta}} = l\sin\beta}$$

3) La condition de roulement sans glissement en I s'écrit:

   $$\vec{V}(I\in S_1/S_0) = \vec{0}$$

   Or

   $$\vec{V}(I\in S_1/S_0) = \vec{V}(A\in S_1/S_0) + \vec{\Omega}(S_1/S_0)\wedge\vec{AI}$$

   $$\Rightarrow \vec{V}(I\in S_1/S_0) = \dot{x}_A\,\vec{x}_0 + \dot{\theta}\,\vec{z}_0 \wedge -r\,\vec{y}_0$$

   $$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(I\in S_1/S_0) = \dot{x}_A\,\vec{x}_0 + \dot{\theta}\,\vec{z}_0 \wedge -r\,\vec{y}_0}$$

4) $$\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\}_G = \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(S_2/S_0)\\ \vec{V}(G\in S_2/S_0)\end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix}\dot{\beta}\,\vec{z}_0\\ \vec{V}(G\in S_2/S_0)\end{matrix}\right\}_G$$

   $$\vec{V}(G\in S_2/S_0) = \vec{V}(A\in S_2/S_0) + \vec{\Omega}(S_2/S_0)\wedge\vec{AG}$$

   or $\quad \vec{V}(A\in S_2/S_0) = \vec{V}(A\in S_1/S_0) = \dot{x}_A\,\vec{x}_0$

   d'où $\quad \vec{V}(G\in S_2/S_0) = \dot{x}_A\,\vec{x}_0 + \dot{\beta}\,\vec{z}_0 \wedge \frac{l}{2}\vec{x}_2$

   $\Rightarrow \quad \vec{V}(G\in S_2/S_0) = \dot{x}_A\,\vec{x}_0 + \frac{l}{2}\dot{\beta}\,\vec{y}_2$

   $$\Rightarrow \boxed{\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\}_G = \left\{\begin{matrix}\dot{\beta}\,\vec{z}_0\\ \dot{x}_A\,\vec{x}_0 + \frac{l}{2}\dot{\beta}\,\vec{y}_2\end{matrix}\right\}_G}$$

5) L'invariant scalaire du torseur $\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\}$ est:

   $$\Im = \vec{\Omega}(S_2/S_0)\bullet\vec{V}(G\in S_2/S_0) = \dot{\beta}\,\vec{z}_0 \bullet \left(\dot{x}_A\,\vec{x}_0 + \frac{l}{2}\dot{\beta}\,\vec{y}_2\right) = 0$$

   et $\vec{\Omega}(S_2/S_0) = \dot{\beta}\,\vec{z}_0 \neq \vec{0}$

   alors $\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\}$ est un glisseur

   son axe central réprésentant l'axe instantanné de rotation du mouvement de $S_2$ par rapport à $S_0$ est la droite $(\Delta)$ // à $\vec{\Omega}(S_2/S_0)$ donc à $\vec{z}_0$ et passant par le point H tel que:

   $$\vec{AH} = \frac{\vec{\Omega}(S_2/S_0)\wedge\vec{V}(A\in S_2/S_0)}{\left\|\vec{\Omega}(S_2/S_0)\right\|^2} = \frac{\dot{\beta}\,\vec{z}_0 \wedge \dot{x}_A\,\vec{x}_0}{\dot{\beta}^2} = \frac{\dot{x}_A}{\dot{\beta}}\vec{y}_0$$

   or $\frac{\dot{x}_A}{\dot{\beta}} = l\sin\beta$

D'où $\boxed{\overrightarrow{AH} = l \sin\beta \vec{y}_0}$

## Remarque

Le point H représente le centre instantané de rotation du mouvement plan sur plan du plan $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$ lié à la tige $S_2$ par rapport au plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ lié à $S_0$.
Il peut être déterminé aussi graphiquement.
En effet,

- la vitesse du point A , $\vec{V}(A \in S_2 / S_0)$, est // à $\vec{x}_0$. H appartient alors à la droite passant par A et $\perp$ à $\vec{x}_0$ c.à.d. $H \in (A, \vec{y}_0)$
- la vitesse du point B , $\vec{V}(B \in S_2 / S_0) = \vec{V}(B \in S_3 / S_0)$, est // à $\vec{y}_0$ (liaison glissière de direction $\vec{y}_0$ entre $S_3$ et $S_0$) . H appartient alors à la droite passant par B et $\perp$ à $\vec{y}_0$ c.à.d. $H \in (B, \vec{x}_0)$

d'où $H = (A, \vec{y}_0) \cap (B, \vec{x}_0)$ (voir figure)

d'après la figure on déduit:

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = l \sin\beta \vec{y}_0}$$

6) $\vec{V}(B \in S_2 / S_0) = \vec{V}(A \in S_2 / S_0) + \vec{\Omega}(S_2 / S_0) \wedge \overrightarrow{AB}$

d'où $\vec{V}(B \in S_2 / S_0) = \dot{x}_A \vec{x}_0 + \dot{\beta} \vec{z}_0 \wedge l \vec{x}_2$

$\Rightarrow$ $\vec{V}(B \in S_2 / S_0) = \dot{x}_A \vec{x}_0 + l \dot{\beta} \vec{y}_2$

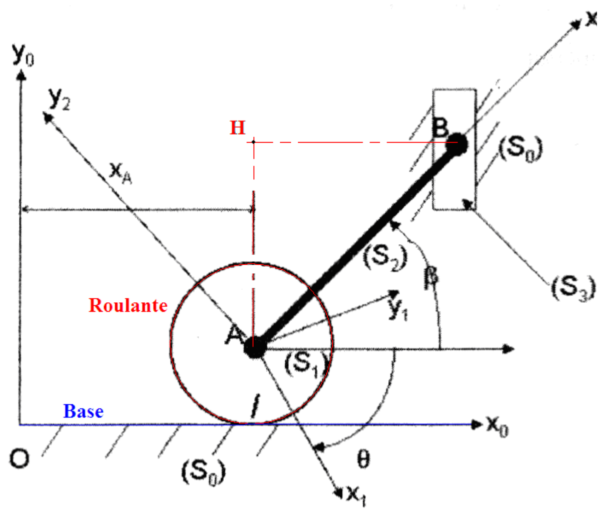
$\Rightarrow$

$\vec{V}(B \in S_2 / S_0) = (\dot{x}_A - l \dot{\beta} \sin\beta) \vec{x}_0 + \cos\beta \vec{y}_0$

$\Rightarrow$ $\vec{V}(B \in S_2 / S_0) = 0 \vec{x}_0 + l \dot{\beta} \cos\beta \vec{y}_0$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{V}(B \in S_2 / S_0) = \vec{V}(B \in S_3 / S_0) = l \dot{\beta} \cos\beta \vec{y}_0}$$




7) $\vec{\gamma}(B \in S_2 / S_0) = \vec{\gamma}(B \in S_3 / S_0) = \left. \dfrac{d\vec{V}(B \in S_3 / S_0)}{dt} \right|_{/R_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}(B \in S_2 / S_0) = \vec{\gamma}(B \in S_3 / S_0) = l \ddot{\beta} \cos\beta \vec{y}_0 - l \dot{\beta}^2 \sin\beta \vec{y}_0}$$

8) Suite à la condition de roulement sans glissement en I on a:

$$\vec{V}(I \in S_1 / S_0) = \vec{0}$$

Le point I est alors le centre instantané du mouvement plan sur plan de $S_1$ par rapport à $S_0$.

- La base qui est l'ensemble des points de $S_0$ parcourus par le point I au cours du mouvement de $S_1$ par rapport à $S_0$ est alors la droite $(O, \vec{x}_0)$.
- La roulante qui est l'ensemble des points de $S_1$ occupés par le point I au cours du mouvement de $S_1$ par rapport à $S_0$ est alors le cercle de centre A et de rayon r.

**Correction**