Exercice1

La description du mouvement d 'un fluide est donnée par les équations suivantes :

$$x\,(x_0, y_0, z_0,t) = x_0 \exp(\alpha\ t)$$

$$y\,(x_0, y_0, z_0,t) = y_0 \exp(-\alpha\ t)$$

$$z(x_0, y_0, z_0,t) = z_0$$

x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées d'une particule dans la configuration de référence, et les x,y,z sont les coordonnées de la particule au temps t.
α est une constante positive.

1- Par quelle description est définie ce mouvement?
2- A quel instant t_0 (donner sa valeur) correspond la configuration de référence ?
3- Quelle est la description lagrangienne des composantes du vecteur vitesse ?
4-Quelle est la description eulérienne des composantes de ce même vecteur vitesse ? L'écoulement est-il permanent ?
5- Quelles sont les composantes Dij du tenseur des taux de déformation ?
(voir fin de chapitre)

Solution de l'exercice 1 :

1- Par quelle description est définie ce mouvement?

Ce mouvement est décrit par la description de Lagrange

2°) La configuration de référence est : $\overrightarrow{OM_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$

On a: $\begin{cases} x(x_0, y_0, z_0, t) = x_0 \exp(\alpha t) \\ y(x_0, y_0, z_0, t) = y_0 \exp(-\alpha t) \\ z(x_0, y_0, z_0, t) = z_0 \end{cases}$

Pour que : $\begin{cases} x(x_0, y_0, z_0, 0) = x_0 \\ y(x_0, y_0, z_0, 0) = y_0 \\ z(x_0, y_0, z_0, 0) = z_0 \end{cases}$

Il faut que le temps soit égale à t=0 , donc t=0 correspond à la configuration de référence

3- Quelle est la description lagrangienne des composantes du vecteur vitesse ?

On a :

$$\vec{V}(M) \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial x}{\partial t} = x_0 \alpha e^{\alpha t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = -y_0 \alpha e^{-\alpha t} \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = 0 \end{array} \right._B$$

4-Quelle est la description eulérienne des composantes de ce même vecteur vitesse ?

La vitesse doit être fonction de x, y, z ,t : soit $\vec{V} = \vec{V}(x,y,z,t)$:

On a:

$$\vec{V}(M)\ \Bigg|_B \begin{array}{l} x_0 \alpha e^{\alpha t} \\ -y_0 \alpha e^{-\alpha t} \\ 0 \end{array}$$

Et puisque : x = x_0 exp(α t)

y = y_0 exp(-α t)

z= z_0

$$\Longrightarrow \quad \vec{V}(M)\ \Bigg|_B \begin{array}{l} \alpha\left(x_0 e^{\alpha t}\right) = \\ -\alpha\left(y_0 e^{-\alpha t}\right) = \\ 0 \end{array}$$

Donc la vitesse s'écrit en description d'Euler : $\vec{V}(M)\ \Bigg|_B \begin{array}{l} \alpha x \\ -\alpha y \\ 0 \end{array}$

L'écoulement est-il permanent ?

On calcule : $\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} = ?$ On trouve $\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$

Donc L'écoulement est permanent

Remarque pratique : Dans un écoulement permanent la vitesse dépend de x, y, z mais ne dépend pas explicitement du temps t, dans la description d'Euler.

A noter que x, y, z dépendent implicitement du temps t.

5- Quelles sont les composantes $\overline{\overline{D}}$ du tenseur des taux de déformation ?

Le tenseur de déformation s'écrit:

$$\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Dans notre cas :

$$\vec{V}(M)\left|\begin{aligned} &u = \alpha x \\ &v = -\alpha y \\ &w = 0 \end{aligned}\right._{B}$$

Donc :

$$\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque : Calculer la divergence de V(M) ?

$$div\vec{V}(M) = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = \alpha - \alpha + 0 = 0 \Rightarrow$$

Pas de variation de volume

On peut le constater en calculant la trace de : $\overline{\overline{D}}$ Trace de $\overline{\overline{D}}$ = 0

5- Quelles sont les composantes $\overline{\overline{D}}$ du tenseur des taux de déformation ?

Le tenseur de déformation s'écrit:

$$\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Dans notre cas :

$$\vec{V}(M)\ \left|\begin{array}{l} u=\alpha x \\ v=-\alpha y \\ w=0 \end{array}\right._{B}$$

Donc :

$$\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque : Calculer la divergence de V(M) ?

$$div\vec{V}(M) = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = \alpha-\alpha+0=0 \Rightarrow$$

Pas de variation de volume

On peut le constater en calculant la trace de $\overline{\overline{D}}$: Trace de $\overline{\overline{D}} = 0$

Exercice2

Soit l' écoulement permanent défini en variables d'Euler par le champ des vitesses

$$\vec{v}(M) = (2x - 3y)\,\vec{e}_1 + (3x - 2y)\,\vec{e}_2$$

1. Déterminer le champ des vecteurs accélérations.
2. Calculer les équations des lignes de courant. Quelle est la forme de celles-ci ?
3. Déterminer le vecteur tourbillon.
4. Déterminer le tenseur des taux de déformation (D).
5. Montrer que le fluide est incompressible

SOLUTION DE EXERCICE 2

En variables d'Euler , on a : $\vec{v}(M) = (2x - 3y)\,\vec{e}_1 + (3x - 2y)\,\vec{e}_2$

1. Déterminer le champ des vecteurs accélérations.

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\overline{\text{grad}\vec{V}}} \circ \vec{V}$$

$$\text{on a : } \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \text{ et } \overline{\overline{\text{grad}\vec{V}}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}(M) = 0 + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \left| \begin{array}{c} 2x - 3x \\ 3x - 2x \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} -5x \\ -5y \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{\gamma}(M) = -5x\,\vec{e}_1 - 5y\,\vec{e}_2$$

2. Calculer les équations des lignes de courant . Quelle est la nature de celles-ci ?

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \Rightarrow \frac{dx}{(2x-3y)} = \frac{dy}{(3x-2y)} \Rightarrow$$

$$(3x-2y)\,dx = (2x-3y)\,dy \Rightarrow 3xdx - 2ydx = 2xdy - 3ydy$$

$$soit : 3(xdx + ydy) = 2(xdy + ydx) \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right) - 2xy = C1$$

Quelle est sa nature ?

Rappel : Comme toute conique, une ellipse possède une équation de la forme :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

avec les contraintes suivantes :

- A et C sont non nuls et de même signe ;
- $B^2 - 4AC < 0$.

sa nature est donc une ellipse

3. Déterminer le vecteur tourbillon : $\boxed{\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}} = \left|\begin{matrix} \frac{\partial \bullet}{\partial x} \\ \frac{\partial \bullet}{\partial y} \\ \frac{\partial \bullet}{\partial z} \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{matrix}\right. \Rightarrow \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}} = \left|\begin{matrix} \frac{\partial \bullet}{\partial x} \\ \frac{\partial \bullet}{\partial y} \\ \frac{\partial \bullet}{\partial z} \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} 2x - 3y \\ 3x - 2y \\ 0 \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3+3 \end{matrix}\right. \Rightarrow$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}} = 3\vec{e}_3}$$

Remarque on peut calculer G et déduire Ω

4. Déterminer le tenseur des taux de déformation (D).

$$\overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \oplus & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \oplus & \oplus & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que le fluide est incompressible

Si le fluide se déforme sans variation de volume (fluide incompressible)

Donc : $\frac{\Delta V}{V} = 0 \implies \mathrm{div}\vec{V}=0$

On a : $\mathrm{div}\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \implies \mathrm{div}\vec{V}=2\text{-}2=0$

donc le fluide est incompressible)

Remarques: 1-Déterliner le tenseur de rotation pur G

$$\overline{\overline{G}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ - & 0 & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ - & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2-Déterminer le vecteur tourbillon : $\vec{\Omega}$

Puisque : $\overline{\overline{G}} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{\Omega} = \left|\begin{matrix} p \\ q \\ r \end{matrix}\right._B$ donc: $\vec{\Omega} = \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}\right._B$

Exercice 3

Soit l'écoulement permanent défini en variables d'Euler par le champ des vitesses

$$\vec{V}(M) = -\alpha\, x^2 y\, \vec{e}_x + \alpha\, x\, y^2 \vec{e}_x \qquad \alpha \text{ est une constante réelle}$$

1. Déterminer les équations des lignes de courant. Quelle est la forme de celles-ci
2. Déterminer les équations paramétriques des trajectoires
3. Déterminer la vitesse et l'accélération lagrangiennes
4. Déterminer l'accélération eulérienne.
5. Déterminer le vecteur tourbillon.
6. Déterminer le tenseur des taux de déformation $[D]$
7. Montrer que le fluide est incompressible

SOLUTION DE EXERCICE3

En variables d'Euler : $\vec{V}(M) = -\alpha\, x^2 y\, \vec{e}_x + \alpha\, x\, y^2 \vec{e}_x$

1. Déterminer les équations des lignes de courant. Quelle est la nature de celles-ci ?

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \Rightarrow \frac{dx}{-\alpha\, x^2 y} = \frac{dy}{\alpha\, x\, y^2} \Rightarrow$$

$$\alpha\, x\, y^2 dx = -\alpha\, x^2 y dy \Rightarrow y\, dx = -\, x dy \Rightarrow$$

$$\text{soit : } y\, dx + \, x dy = 0 \Rightarrow \; dxy = 0 \Rightarrow$$

$xy = C$, donc les lignes de courant sont des hyperboles

2. Déterminer les équations paramétriques des trajectoires

$$\text{on a : } dt = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \Rightarrow \qquad dt = \frac{dx}{-\alpha\, x^2 y} = \frac{dy}{\alpha\, x\, y^2} \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} dt = \dfrac{dx}{-\alpha\, x^2 y} \\ \\ dt = \dfrac{dy}{\alpha\, x\, y^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -\alpha\, x^2 y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha\, x\, y^2 \end{array} \right.$$

Or xy=constante=C donc : $\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -\alpha x\, C \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha\, yC \end{array} \right.$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -\alpha x\, C \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha\, yC \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{x} = -\alpha\, Cdt \\ \\ \dfrac{dy}{y} = \alpha\, Cdt \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = C_1 e^{-\alpha\, Ct} \\ y = C_2 e^{\alpha\, Ct} \end{array} \right.$$

Équation paramétriques des trajectoires

$$\left| \begin{array}{l} x = C_1 e^{-\alpha\, Ct} \\ y = C_2 e^{\alpha\, Ct} \end{array} \right. \Rightarrow x = C_1 \left(\frac{C_2}{y} \right) \Rightarrow \quad xy = C_1 C_2$$

Équation cartésiennes des trajectoires

Remarque : puisque le régime est permanent les lignes de courant = trajectoires

3. Déterminer la vitesse et l'accélération lagrangiennes

On a : $\left| \begin{array}{l} x = C_1 e^{-\alpha\, Ct} \\ y = C_2 e^{\alpha\, Ct} \end{array} \right.$ donc $\vec{V}(M) \left| \begin{array}{c} -C_1 \alpha e^{-\alpha Ct} \\ C_1 \alpha e^{-\alpha Ct} \\ 0 \end{array} \right.$ $\vec{\gamma}(M) \left| \begin{array}{c} CC_1 \alpha^2 e^{-\alpha Ct} \\ -CC_1 \alpha^2 e^{-\alpha Ct} \\ 0 \end{array} \right.$

4. Déterminer l'accélération eulérienne.

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\overline{\mathrm{grad}\,\vec{V}}} \circ \vec{V}$$

$$\text{ona} : \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \text{ et } \quad \overline{\overline{\mathrm{grad}\,\vec{V}}} = \left(\quad \right)$$

$$\vec{\gamma}(M) = 0 + \left(\quad \right) \circ \left| \quad \right. = \left| \begin{array}{c} \alpha^2 x^3 y^2 \\ \alpha^2 x^2 y^3 \\ 0 \end{array} \right. \qquad \vec{\gamma}(M) = \left| \begin{array}{c} \alpha^2 x^3 y^2 = \alpha^2 C' \\ \alpha^2 x^2 y^3 = \alpha^2 C' \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{\gamma}(M) = \alpha^2 C' x \vec{e}_1 + \alpha^2 C' y \vec{e}_2$$

5. Déterminer le vecteur tourbillon.

$$\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}} \Rightarrow} \qquad \boxed{\vec{\Omega} = \frac{\alpha}{2}\left(x^2 + y^2\right)\vec{e}_3}$$

6. Déterminer le tenseur des taux de déformation

$$\overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \oplus & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \oplus & \oplus & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha xy & 0 & \frac{\alpha}{2}\left(y^2 - x^2\right) \\ 0 & 2\alpha xy & 0 \\ -\frac{\alpha}{2}\left(y^2 - x^2\right) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Montrer que le fluide est incompressible

$$\text{On a : } \mathrm{div}\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \Rightarrow \mathrm{div}\vec{V} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \Rightarrow \quad \mathrm{div}\vec{V} = 0$$

donc le fluide est incompressible)

Exercice 9:
L'´ecoulement bidimensionnel d'un fluide est défini par les trajectoires Lagrangiennes

$$x = x_0 e^{kt}$$

$$y = y_0 e^{-kt}$$

1- Quelle est la forme de la trajectoire y(x) ?
2- Trouver les composantes de la vitesse.
3- L'´ecoulement est-il stationnaire ?

Exercice 10
Déterminer les lignes de courants définies par le champ de vitesse Eulérien

$$u = -\Omega\, y$$
$$v = \Omega\, x$$
$$w = w_0$$

où Ω et w_0 sont constants, et en faisant l'hypothèse que l'´ecoulement est stationnair